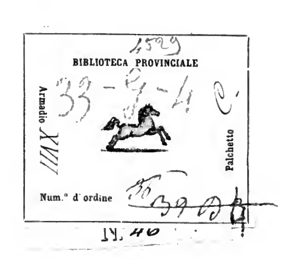



FONDO PIZZOFALCONE


4529
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d'ordine

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE MÉCANIQUE.

MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES.

CET OUVRAGE SE TROUVE AUSSI :

à Toulouse............ chez CHARPENTIER.

LEIPSICK, chez MICHELSEN.

LONDRES, chez DULAU et Cie.

Genève.............	chez	CHERBULIEZ.
Pétersbourg..........	—	GRAFF.
Turin.	—	BOCCA. PIC.
Vienne...............	—	ROHRMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE MÉCANIQUE

APPLIQUÉE

AUX SCIENCES PHYSIQUES ET AUX ARTS;

PAR C. BRESSON.

MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES.



PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1842



AVERTISSEMENT.

On a publié, sur la Mécanique et sur ses applications, un grand nombre d'ouvrages qui peuvent se diviser en deux classes : la première est celle des ouvrages composés par les géomètres les plus célèbres et par les savants professeurs qui marchent sur leurs traces; ce sont des Traités de Mécanique analytique dans lesquels ils ont employé toutes les ressources de la plus profonde analyse. La seconde classe est celle des ouvrages qui ont pour but les applications de la Mécanique aux divers travaux d'architecture, à la construction et à l'emploi des machines.

Pour comprendre les applications que l'on explique dans les ouvrages de cette deuxième classe, il faut avoir étudié les principes de la Mécanique; on les trouve exposés brièvement dans les Traités de Mécanique analytique, où ils sont entremêlés de questions relatives à l'objet principal de ces Traités, qui est de servir d'introduction à la physique mathématique et aux grands problèmes du système du monde.

Ces Traités ne peuvent pas suffire pour la classe nombreuse des personnes qui exercent les diverses professions des arts industriels, pour les professeurs et les jeunes gens qui veulent ajouter aux études qu'ils ont faites dans les colléges, les connaissances qui leur sont nécessaires dans l'état actuel de la société; il leur faut des ouvrages où la théorie de la Mécanique soit suffisamment développée pour en faciliter l'étude. Il y en a déjà de très-estimables : celui-ci, malgré ses imperfections, ne sera

peut-être pas inutile; j'y consacre la fin de ma carrière, qui a été remplie pendant plus de vingt ans par l'enseignement des mathématiques.

J'avais senti le besoin, pour faire suite à mes leçons de mathématiques, d'un ouvrage composé sur le plan que je viens d'indiquer, et j'en avais formé le projet; mes occupations ne me laissaient pas assez de temps pour l'exécuter, et, afin d'y suppléer, je faisais traduire par mes élèves les meilleurs Traités de mécanique publiés en Angleterre et en Allemagne; j'ai repris ce projet en 1824 pour m'en occuper spécialement, et depuis cette époque je n'ai pas cessé d'y travailler.

Pour étudier les applications que l'on a faites des principes de la Mécanique, dans l'état actuel des arts de construction, j'ai visité avec assiduité les chantiers de quelques monuments et de divers travaux publics; des ateliers où l'on construisait les machines, et des manufactures où elles sont en activité. Tous ces travaux sont exécutés par un population laborieuse et intelligente, au milieu de laquelle j'ai fait de longues études, dans lesquelles je cherchais à recueillir les renseignements, les esquisses et les dessins dont j'avais besoin.

Peu de temps avant mes visites dans les chantiers et les établissements où l'on construisait les machines, de notables améliorations y avaient été introduites. Dans les machines pour les travaux d'architecture, les grues ont été remplacées par l'appareil beaucoup plus simple que j'ai décrit dans la Statique; on y trouve aussi les principales machines qui servent pour le transport et l'élévation des fardeaux, dans les constructions de bâtiments, sur les ports et dans les ateliers. J'ai choisi parmi ces diverses machines celles qui m'ont paru les meilleures, et je les ai dessinées d'après les mesures que j'avais prises; les échelles sont indiquées par des fractions de la grandeur naturelle.

Quant aux diverses machines qui fonctionnent comme outils dans les ateliers de construction, on y a fait des améliorations et des augmenta-

tions considérables; ces machines ne peuvent pas être comprises avec celles dont on doit s'occuper dans un Traité général de Mécanique.

Il faut se borner à un choix parmi les exemples que l'on peut donner pour appliquer les principes de la Mécanique; plusieurs articles que j'avais rédigés ont été supprimés ou renvoyés à d'autres parties, et, malgré ces suppressions, le volume excède encore de beaucoup les limites dans lesquelles je m'étais proposé de me renfermer.

Je parlerai, lorsque j'en aurai l'occasion, des grands travaux que j'ai observés et des ateliers où il m'a été permis de suivre tous les détails des machines que l'on y construisait; j'y ai trouvé des élèves et des amis; les chefs de ces établissements, les ingénieurs et les ouvriers m'ont constamment aidé avec obligeance à lever les difficultés qui pouvaient m'embarrasser. Par leur concours et par des circonstances particulières, mes recherches ont eu un succès favorable; je serais amplement récompensé s'il en était de même pour l'ouvrage qui me les a fait entreprendre, et dans lequel j'en rapporte les résultats.

Si je me suis beaucoup étendu dans cet ouvrage, c'est pour n'omettre aucune des parties de la Mécanique des corps solides nécessaires à l'étude des sciences physiques et des arts de construction; pour démontrer, avec autant de clarté qu'il m'a été possible, les propositions de la théorie, et pour les éclaircir par des exemples pris dans les expériences et dans les faits de la pratique.

Il ne sera peut-être pas inutile de terminer cet avertissement par un conseil qui pourra être suivi par beaucoup de personnes qui n'ont pas toutes les connaissances de mathématiques que j'ai employées; je leur dirai : Étudiez les énoncés des propositions qui renferment des calculs théoriques que vous ne pouvez pas refaire, passez ces calculs jusqu'à l'équation finale, ou à la formule, qui est l'expression algébrique d'une règle que l'on traduit facilement en toutes lettres. Les exemples auxquels ces règles sont appliquées suffisent pour indiquer aux praticiens

la manière d'en faire usage dans tous les cas qui peuvent s'y rapporter.

Les personnes qui n'ont fait que des études incomplètes des éléments de mathématiques trouveront, en parcourant cet ouvrage, des applications à leur portée; je leur dirai : Les mathématiques sont la clef de toutes les sciences naturelles; pour apprendre ce qu'il est nécessaire d'en savoir pour les usages ordinaires, il suffit d'y consacrer le temps et la dépense dont vous pouvez disposer.

Si je parle ici le langage du professeur, c'est parce que je me rappelle avec satisfaction les jouissances que j'ai éprouvées dans l'enseignement; mes premiers amis ont disparu, ce sont des pertes affligeantes, ceux qui les ont remplacés, qui m'ont encouragé et qui m'aident à remplir ma dernière tâche ont été mes élèves; ils occupent des positions honorables dans lesquelles ils contribuent au progrès des arts. Je voudrais y joindre ma coopération en montrant, autant que mes faibles moyens peuvent me le permettre, les avantages que les arts peuvent tirer des sciences théoriques.

Paris, le 17 novembre 1841.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

FIN DE LA TABLE.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE MÉCANIQUE.

MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR L'OBJET DE CET OUVRAGE.

Dans presque toutes les inventions, la pratique a précédé la théorie, et la plupart des hommes qui se sont distingués par des découvertes, n'avaient que quelques notions superficielles des sciences mathématiques, qui sont la base de la théorie des sciences physiques et des arts ; mais ces inventeurs étaient des hommes de génie, qui ont créé, par la persévérance et la ténacité de leur application, la théorie qui les guidait.

Quoique la théorie ne puisse pas suppléer le génie, elle lui fournit des règles, qui ne pourraient être remplacées que très-imparfaitement par des essais pénibles, longs et dispendieux.

C'est la Mécanique qui forme la partie principale de cette théorie; elle suppose la connaissance des calculs numérique et algébrique, des éléments de géométrie, avec quelques formules de trigonométrie; ce sont les éléments de

mathématiques qu'on enseigne dans les colléges et les pensions; il faut y ajouter les éléments de géométrie analytique et les premiers principes des calculs différentiel et intégral.

Avec ces connaissances préliminaires, on pourra refaire les calculs et comprendre les démonstrations de toutes les propositions de ce Traité de Mécanique.

En rédigeant cet ouvrage avec tous les détails qu'exigent les démonstrations des propositions qu'il renferme, j'ai cherché à disposer les règles qui se déduisent de ces propositions pour en rendre les applications faciles.

Ces règles, qui sont suivies d'exemples numériques, sont à la portée des personnes qui n'ont que des connaissances élémentaires de calcul et de géométrie; pour en faire usage, il suffit de savoir substituer, dans une formule algébrique, les nombres représentés par des lettres, ce qui la réduit à des calculs indiqués qu'on peut achever, soit en se servant des Tables de logarithmes, soit par les règles de l'Arithmétique.

La Mécanique est une science qui fait connaître les lois de l'équilibre et du mouvement des corps; et comme dans une première division générale des corps, ils forment deux grandes classes, dont l'une comprend les corps solides et l'autre les fluides, on divise pareillement la Mécanique en deux parties, qui sont la mécanique des corps solides et celle des fluides, et chacune se divise encore en deux parties.

Dans la Mécanique des corps solides, dont nous allons nous occuper, la première partie, qui consiste dans la recherche des lois, ou des règles de l'équilibre des corps, se nomme *Statique;* la seconde partie, qu'on a nommée *Dynamique,* renferme l'exposition des lois du mouvement.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS ET NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. La Statique a pour objet l'équilibre des forces qui agissent sur les corps solides.

On appelle corps solides, ceux dont les molécules sont adhérentes et qui ne peuvent être divisés sans efforts.

Les dimensions des corps sont déterminées d'après la nature des objets auxquels ils doivent être employés; nous supposerons d'abord qu'ils sont réduits à de simples points matériels sans pesanteur; en faisant abstraction du volume et du poids, les démonstrations sont plus faciles à concevoir. On voit que cette marche est analogue à celle que l'on suit dans les éléments de géométrie, où l'on ne considère d'abord que la ligne droite, ensuite les plans et enfin les volumes. Lorsque les premiers principes de la Statique seront établis avec les seules considérations qui sont nécessaires pour les rendre intelligibles, nous en ferons l'application aux différents corps, tels qu'ils se présentent dans les recherches qui intéressent cette partie de la Mécanique.

2. Un corps est en repos lorsqu'il reste dans un même lieu; il est en mouvement lorsqu'il est transporté d'un lieu dans un autre.

Le repos absolu n'existe pour aucun corps, ils participent tous au double mouvement de la Terre, qui parcourt son orbite autour du soleil dans l'espace d'une année, et qui fait chaque jour une révolution autour de son axe; le repos que nous observons dans les corps qui nous environnent est donc seulement un repos relatif, semblable à celui des corps placés dans un navire qui les emporte tous par son mouvement sur la surface des mers; mais indépendamment de ce mouvement commun, les divers corps renfermés dans le navire peuvent être dans un repos relatif, en restant dans la place qu'ils occupent; on peut aussi les faire passer du repos au mouvement relatif, en les rapprochant ou les éloignant les uns des autres.

3. Un corps en repos ne peut être mis en mouvement que par l'action d'une cause étrangère qu'on appelle *force* ou *puissance;* et si un corps est en mouvement, il continuera à se mouvoir jusqu'à ce qu'une force, agissant dans une direction opposée, détruise le mouvement qui lui a été communiqué.

Nous n'avons aucun moyen pour découvrir quelle est la nature des forces, mais nous connaissons les effets qu'elles produisent en agissant sur les corps, et il n'en faut pas davantage pour résoudre toutes les questions de mécanique qui peuvent nous intéresser.

Lorsqu'un corps n'est sollicité par l'action d'aucune force, il reste en repos; si plusieurs forces sont appliquées à un corps en repos, et que leurs *intensités,* ou les efforts qu'elles exercent sur ce corps, se détruisent, le repos du corps ne sera

pas troublé, il aura seulement une tendance à sortir de son état pour se mettre en mouvement.

4. On dit qu'un corps est en *équilibre,* lorsqu'il est sollicité par un système, ou par un assemblage de plusieurs forces qui se détruisent. Ainsi le repos et l'équilibre sont deux états qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la tendance au mouvement qu'éprouve un corps en équilibre.

Un système est l'assemblage de plusieurs corps liés entre eux, de sorte que si le système est invariable, le mouvement communiqué à l'une de ses parties est immédiatement transmis à toutes les autres; ainsi une machine n'est autre chose qu'un système, dont toutes les parties sont disposées convenablement pour produire les effets que l'on veut obtenir.

Si un corps, ou un système, doit être mis en mouvement, on peut d'abord lui appliquer les forces nécessaires pour le tenir en équilibre, ou pour produire une simple tendance au mouvement. La Statique enseigne les règles que l'on doit suivre dans le choix et la disposition de ces forces; il suffit ensuite d'augmenter leurs intensités ou d'ajouter de nouvelles forces pour produire le mouvement.

Ces considérations générales font voir que pour étudier la Mécanique, suivant l'enchaînement naturel des idées, il faut commencer par la Statique, qui en forme la première partie, et qui renferme, d'ailleurs, beaucoup de propositions qu'il est nécessaire de se rendre familières, parce que l'on trouve souvent l'occasion de les appliquer, lorsqu'on veut se rendre compte de l'effet que doivent produire les machines.

5. Il y a trois choses principales à distinguer dans une force qui est appliquée à un corps, ou à un système: 1° son point d'application; 2° sa direction; 3° sa mesure, c'est-à-

dire l'intensité de l'action qu'elle produit, ou qu'elle tend à produire lorsque le système est en équilibre.

Lorsqu'une force est appliquée à un corps, son point d'application est le point de ce corps sur lequel la force agit; sa direction est la ligne droite qui passe par son point d'application, et suivant laquelle cette force tend à l'entraîner, soit en le tirant, soit en le poussant.

6. Le point d'application d'une force peut être placé à l'un quelconque des points de la ligne droite suivant laquelle cette force exerce son action.

Si une force est appliquée au corps solide M (*fig.* 1), pour tirer ce corps suivant la ligne droite AB, le point A, ou tout autre point de la ligne droite AB, peut être pris pour le point d'application de la force; et si la droite AB est prolongée dans le sens opposé AB′, on pourra transporter le point d'application de la force en un point quelconque A′ de ce prolongement; mais alors la ligne de direction devra être une verge inflexible, et la force agira en poussant le corps par le moyen de cette verge.

Supposons que l'on applique au point A′ deux forces égales, agissant en sens contraire, suivant la ligne droite BB′; ces deux forces seront en équilibre. Supposons de plus, que chacune d'elles soit égale à la force qui est appliquée au point A et qui agit suivant AB; alors cette dernière force sera détruite par celle qui agit en A′ dans la direction opposée A′B′, et il ne restera que celle qui est appliquée au même point A′, suivant la direction A′B; le corps solide M sera toujours sollicité par la première force qui lui a été appliquée, mais le point d'application de cette force sera transporté du point A au point A′.

7. Pour évaluer l'intensité d'une force, ou l'effort qu'elle

peut exercer, il faut connaître le rapport de cette force à une unité déterminée; l'unité de poids est celle qui présente le plus d'analogie dans les applications du calcul numérique à toutes les forces que l'on peut employer dans la Mécanique.

Si l'on veut connaître la valeur de la force appliquée au corps solide M, pour tirer ou pousser ce corps, on fera passer la corde AB, menée suivant la direction de la force, sur une poulie fixe placée en l'un des points B de cette direction; un poids P, attaché à cette corde, et qui produira le même effort que la force, exprimera la mesure de son intensité.

Une force 2, 3, 4,...,*n* fois plus grande, sera mesurée par un poids 2, 3, 4,...,*n* fois plus grand que le poids P; la lettre *n* exprime un nombre quelconque, entier ou fractionnaire.

Pour démontrer les propositions sur lesquelles la théorie de l'équilibre est fondée, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur absolue des forces, il suffit d'avoir leurs rapports; on obtient ces rapports d'une manière très simple, en désignant les forces par des lignes droites qui leur sont proportionnelles: on est convenu de représenter une force quelconque par une longueur prise sur la ligne droite suivant laquelle cette force agit, à partir de son point d'application; on simplifie encore cette notation, en désignant une force par une seule lettre, que l'on place à la suite de celles qui marquent la longueur de la droite par laquelle on représente l'intensité de cette force.

Si la ligne droite AB contient l'unité linéaire autant de fois que l'unité de poids est contenue dans le poids P, la force appliquée au corps solide M, que nous avons supposée équivalente au poids P, pourra être représentée soit par la ligne droite AB, soit par la lettre P ou par une autre lettre que l'on écrirait sur le prolongement de AB.

CHAPITRE II.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN POINT.

8. Deux forces sont égales lorsque étant appliquées à un point et agissant suivant une même ligne droite, dans des directions opposées, elles se font équilibre. Si l'une de ces forces change sa direction pour agir sur le même point dans la direction de l'autre force, alors le point matériel sera sollicité par une force double: en ajoutant suivant la même direction, et dans le même sens, une troisième force égale à chacune des deux premières, le point sera sollicité par une force triple. On peut concevoir que le nombre de ces forces soit augmenté, et qu'il devienne un multiple quelconque de l'une des premières, prise pour l'unité de force, qui sera représentée par l'unité linéaire; en portant cette unité sur la ligne droite suivant laquelle les forces agissent, à partir de leur point d'application, autant de fois qu'il y a de forces, leur somme sera représentée par la ligne droite qui contient la somme de ces unités linéaires.

Lorsqu'un nombre quelconque de forces sont appliquées à un point matériel, suivant une même ligne droite, que ces forces sont divisées en deux parties, dont l'une agit dans un sens et l'autre dans un sens opposé; si l'on regarde les forces qui forment la première partie, ou le premier groupe, comme positif, celles de la deuxième partie, ou le second groupe,

sera négatif, et leur somme sera égale à la différence entre la somme de celles du premier groupe et celle du second; par exemple, l'unité de force étant désignée par p, si le premier groupe contient m fois cette unité et qu'elle soit contenue n fois dans le second groupe, la somme de toutes ces forces sera exprimée par la formule suivante:

$$mp - np = (m - n)p.$$

Cette somme pourra être positive, nulle ou négative, suivant que le nombre m sera plus grand, égal ou plus petit que le nombre n : dans le premier cas, le point matériel sera entraîné dans le sens des forces positives; dans le second cas, les forces se détruiront et le point restera en équilibre; enfin, dans le troisième cas, il suivra la direction des forces négatives.

9. Les forces positives peuvent être remplacées par une seule force égale à leur somme et qui agira dans le même sens; cette dernière force s'appelle la *résultante* des forces partielles, et celles-ci se nomment les *composantes*. On peut également, à la place des forces négatives, substituer leur résultante; ce qui ne produira aucun changement dans l'action des forces : en général, dans un système quelconque de forces, on peut remplacer, par la résultante, les forces partielles qui en sont les composantes.

La *composition des forces* a pour objet de trouver la résultante de plusieurs forces, dont les directions et les grandeurs sont données; et lorsqu'une seule force connue doit être décomposée en plusieurs autres qui agissent suivant des directions déterminées, on considère la force donnée comme une résultante et on cherche les composantes; cette recherche

est l'objet du problème que l'on nomme la *décomposition des forces*.

Nous avons vu que plusieurs forces appliquées à un point matériel, et qui agissent suivant une même ligne droite, peuvent se réduire à une seule force, qui se nomme résultante, dont l'intensité produit un effet égal à celui des composantes ou de toutes les forces partielles; pour établir l'équilibre, il faut rendre nul l'effet que la résultante est capable de produire, ce qui se réduit à lui opposer une force qui lui soit égale et directement opposée.

Ces considérations font voir que pour établir l'équilibre dans un système sollicité par des forces dont les directions et les intensités sont données, il faut d'abord chercher la résultante de ces forces; et réciproquement, si l'on a besoin de faire agir une force donnée suivant plusieurs directions, on trouvera ses composantes par la décomposition des forces: nous allons nous occuper de ces deux problèmes importants; nous commencerons par le cas le plus simple, qui est celui de deux forces appliquées à un point situé à la rencontre des lignes droites suivant lesquelles ces forces sont dirigées; alors la résultante agit suivant une ligne droite située dans le plan des composantes. Cette droite, suivant laquelle agit la résultante, est comprise dans l'angle formé par les directions des composantes, et si ces deux dernières forces sont égales, l'angle qu'elles forment, ou, ce qui est la même chose, l'angle des deux lignes droites suivant lesquelles elles agissent, sera divisé en deux parties égales par la direction de leur résultante.

10. La résultante de deux forces inégales P, Q, appliquées au point A, est dirigée suivant une ligne droite AR qui partage l'angle PAQ, formé par les directions de ces forces en

deux angles inégaux; le plus petit de ces deux angles est adjacent à la plus grande force.

Soient AB, AC (*fig.* 2) les lignes droites qui représentent les forces P, Q; supposons la force Q plus grande que P, et soit AR la direction de la résultante de ces deux forces; l'angle RAQ, compris entre la ligne droite AR et la direction de la plus grande force, sera moindre que l'angle RAP compris entre AR et la direction de la plus petite force.

Prenons, sur AC, la distance $AC' = AB$; la résultante des forces représentées par ces deux lignes droites égales sera dirigée suivant la droite AR', qui partage l'angle BAC' en deux parties égales; cette résultante est celle de la force P et d'une autre force égale à P, prise sur la force Q; en la composant avec le reste $Q - P$ de la force Q, leur résultante, qui est celle des deux forces P, Q, sera dirigée suivant une ligne droite AR, située dans l'angle R'AQ, et par conséquent l'angle $RAQ < RAP$; c'est-à-dire que la résultante de deux forces inégales s'éloigne moins de la plus grande force que de la plus petite.

11. Si deux forces P, Q, appliquées au point A, sont dirigées suivant les droites AB, AC (*fig.* 3); si l'on prend sur ces droites les parties AB, AC, proportionnelles aux forces, et si l'on achève le parallélogramme ABFC, la résultante des deux forces P, Q, sera dirigée suivant la diagonale AF de ce parallélogramme.

Prenons sur les directions des forces, à partir de leur point d'application A, les distances Ab, bb', $b'b''$, etc., Ac, cc', $c'c''$, etc., égales à l'unité; chacune de ces unités linéaires représentera l'unité de force. Formons le losange ou le rhombe $Abfc$, la résultante des forces égales représentées par Ab, Ac, sera dirigée suivant la diagonale Af, qui par-

tage l'angle bAc en deux parties égales: cette résultante peut être appliquée au point f; supposons qu'elle soit décomposée en ses composantes, dirigées l'une suivant ff' et l'autre suivant fg, celle-ci peut être appliquée au point b, le point d'application de la première restant au point f.

La résultante des deux forces égales représentées par bb', bf, appliquées au point b, est dirigée suivant la diagonale bf' du rhombe $bb'f'f$; nous pouvons supposer cette résultante appliquée à l'extrémité f' de la diagonale Af'; alors les trois forces appliquées à ce point, savoir: ff' ou Ab, bb' et bf ou Ac, sont égales aux deux forces représentées par Ab' et Ac. Par conséquent la résultante de ces deux forces passe par le point f', mais elle passe aussi par le point A; donc la résultante des deux forces représentées par les lignes droites Ab', Ac, qui sont entre elles comme 2 est à 1, est dirigée suivant la diagonale Af' du parallélogramme $Ab'f'c$ décrit sur ces lignes.

On prouvera de la même manière que la résultante des forces représentées par les droites Ab'', Ac, qui sont entre elles comme 3 : 1, est dirigée suivant la diagonale Af'' du parallélogramme $Ab''f''c$, décrit sur ces droites, et ainsi de suite: d'où l'on peut conclure que si deux forces sont entre elles comme m : 1, et que l'on décrive un parallélogramme sur les droites qui représentent ces forces, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale de ce parallélogramme.

Soient maintenant deux forces représentées par les lignes droites AB, Ac', qui sont entre elles comme m : 2. Nous avons vu que les forces représentées par les lignes droites AB, Ac, sont entre elles comme m : 1, et que leur résultante est dirigée suivant la diagonale Ad du parallélogramme $ABdc$; décomposons cette résultante au point d, en ses composantes,

l'une dirigée suivant dh, l'autre suivant dd', celle-ci peut être appliquée au point d', et la première étant appliquée au point c, elle sera représentée par $cd = \text{AB}$. La résultante des forces représentées par cd, cc' est dirigée suivant la diagonale cd' du parallélogramme $cdd'c'$; par conséquent les trois forces représentées par les droites $dd' = \text{A}c$, cc' et $cd = \text{AB}$, peuvent être appliquées au point d'; mais ces trois forces sont égales aux deux représentées par les lignes AB, $\text{A}c'$; donc la résultante de ces deux dernières forces, qui sont entre elles comme $m : 2$, passe par le point d'; mais cette résultante passe aussi par le point A, donc elle est dirigée suivant la diagonale $\text{A}d'$ du parallélogramme $\text{AB}d'c'$.

On démontrera de la même manière que si deux forces sont entre elles comme $m : 3$, comme $m : 4, \ldots$, comme $m : n$, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale du parallélogramme décrit sur les droites proportionnelles à ces forces, prises sur leurs directions, à partir du point sur lequel elles agissent. Donc si deux forces quelconques P, Q, sont entre elles comme le rapport $m : n$ de deux nombres rationnels, en prenant les droites AB, AC, sur les directions de ces forces, dans le rapport de m à n, et achevant le parallélogramme ABFC, la résultante des forces P, Q sera dirigée suivant la diagonale AF de ce parallélogramme.

12. La proposition étant démontrée pour deux forces dont le rapport est exprimé par des lignes droites qui sont entre elles comme deux nombres rationnels, on prouvera, de la manière suivante, qu'elle serait encore vraie dans le cas où le rapport des forces serait incommensurable, ce qui aurait lieu, par exemple, si les intensités des forces étaient exprimées, l'une par la longueur du côté d'un carré, et l'autre par la longueur de sa diagonale.

Soient les deux forces P, Q, représentées par les lignes droites AB, AC (*fig.* 4); la résultante de ces deux forces sera dirigée suivant la diagonale AF du parallélogramme ABFC.

Si la résultante des forces P, Q, n'est pas dirigée suivant la diagonale AF, soit AG sa direction; partageons AB en parties égales plus petites que FG, et portons l'une de ces parties sur BF autant de fois qu'elle peut y être contenue; il y aura au moins un point de division D entre G et F: menons par ce point la droite DE, parallèle à AB, et joignons AD.

La résultante des forces représentées par les lignes droites AB et BD, ou son égale AE, dout le rapport est commensurable, sera dirigée suivant la diagonale AD du parallélogramme ABDE; mais, par hypothèse, la résultante des forces P, Q, représentées par AB, AC, est dirigée suivant AG, ce qui est impossible, car la résultante de ces forces doit être moins éloignée de AC que celle des forces représentées par AB, AE, puisque AC > AE. Le même raisonnement s'applique à toute autre ligne droite qui ne coïncide pas avec AF: donc qnel que soit le rapport des forces P, Q, la résultante de ces forces sera dirigée suivant la diagonale AF du parallélogramme dont les côtés AB, AC sont proportionnels à ces forces.

13. Si deux forces P, Q, sont représentées par les lignes droites AB, AC (*fig.* 5), appliquées au point A, et si l'on décrit sur ces droites le parallélogramme ABFC, la grandeur de la résultante des forces P, Q, sera exprimée par la diagonale AF de ce parallélogramme.

On a prouvé, dans les propositions précédentes, que la résultante de deux forces appliquées à un point est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme décrit sur les lignes

droites qui représentent ces forces : nous allons démontrer maintenant que la grandeur de cette diagonale exprime celle de la résultante des deux forces.

Soit R la grandeur inconnue de la résultante des forces P, Q; cette résultante est dirigée suivant la diagonale AF, d'après la proposition précédente; si l'on applique au point A, dans la direction du prolongement de la diagonale FA, une force R′ égale et opposée à la résultaute R des forces P, Q, les trois forces P, Q, R′ seront en équilibre; mais lorsque trois forces appliquées à un point sont en équilibre, l'une quelconque de ces forces est égale et opposée à la résultante des deux autres : donc la force Q est égale et directement opposée à la résultante des forces P et R′.

Prolongez CA, prenez sur ce prolongement une partie AC′ = AC, et par le point C′ menez C′ F′ parallèle à AB; BF est égale et parallèle à AC ou AC′, donc BC′ est parallèle à AF′ et la figure ABC′ F′ est un parallélogramme : je dis que le côté AF′ de ce parallélogramme représentera la grandeur de la force R′.

La force Q′, représentée par AC′, est la résultante des forces P et R′; si la force R′ était représentée par une droite AD plus petite que AF′, en menant DE parallèle à AB, les forces P et R′ auraient pour résultante une force dirigée suivant la diagonale AE du parallélogramme ABED, ce qui est impossible, puisque cette résultante doit être dirigée suivant le prolongement AC′ de CA.

On prouverait, par un raisonnement semblable, que la grandeur de la force R′ ne peut être exprimée par une ligne droite plus grande que AF′; donc cette droite représeute la force R′.

La force R′ est égale et opposée à la résultante R des

forces P et Q, et cette force R′ est représentée par la droite AF′ = BC′ = AF, puisque les figures BC′F′A, BC′AF sont deux parallélogrammes compris entre les mêmes parallèles, et qui ont la base commune BC′. Donc la grandeur de la résultante R est représentée par la diagonale AF du parallélogramme ABFC.

14. Le principe de la composition des forces, qui est démontré dans les propositions précédentes, se nomme *théorème du parallélogramme des forces;* c'est sur ce principe que sont fondées la composition et la décomposition des forces: on en fait l'application pour trouver l'équilibre dans les machines simples; c'est en même temps un principe d'équilibre et de mouvement que l'on doit se rendre très familier, parce qu'on a besoin de l'employer dans un grand nombre de questions de mécanique.

Il y a peu de propositions aussi fécondes que celle du parallélogramme des forces: nous allons faire connaître quelques-unes des conséquences qui s'en déduisent immédiatement.

Nous observerons d'abord que dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux; ainsi à la place du côté AC on peut prendre son égal BF pour représenter la force Q; alors les deux forces P, Q, et leur résultante R, seront représentées par les trois côtés du triangle ABF, c'est-à-dire qu'on aura

$$P : Q : R :: AB : BF : AF.$$

Dans ces proportions, les côtés du triangle ABF peuvent être remplacés par ceux de tout autre triangle qui lui serait semblable.

Si l'une des forces P, Q, était nulle, leur résultante R se-

rait égale à l'autre force; mais la résultante ne peut être nulle que dans le cas où les deux forces le sont en même temps. Deux forces ne peuvent avoir une résultante nulle que lorsque ces forces sont égales, et qu'elles agissent suivant une même ligne droite dans des directions opposées.

Dans tout triangle rectiligne, les côtés sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés; ainsi dans le triangle ABF, si l'on observe que le sinus de l'angle ABF est le même que celui de son supplément PBF = BAC, et que l'angle AFB = CAF, on aura

$$AB : BF : AF :: \sin CAF : \sin BAF : \sin BAC;$$

ces derniers rapports peuvent être substitués à ceux des côtés du triangle, ce qui donne:

$$P : Q : R :: \sin CAF : \sin BAF : \sin BAC.$$

Ces trois rapports égaux font voir que les deux forces P, Q, et leur résultante R, sont respectivement représentées par les sinus des angles du triangle ABF, de manière que chacune de ces forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres forces.

15. Deux forces qui agissent sur un point étant données, avec l'angle formé par les directions de ces forces, on peut calculer directement la valeur de leur résultante.

Soient les deux forces P et Q représentées par les lignes droites AB, AC (*fig.* 6), prises sur leurs directions; ayant formé le parallélogramme ABFC, sa diagonale AF représentera la résultante R des forces P et Q. Cette construction peut être remplacée par une formule qui ne renferme que les intensités des forces et l'angle formé par leurs directions.

3

Du point F abaissons FG perpendiculaire sur la direction AB de la force P, nous aurons :

$$\overline{AG}^2 = (AB + BG)^2 = \overline{AF}^2 - \overline{FG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + 2AB \times BG;$$
$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{FG}^2 + 2AB \times BG;$$

en observant que par la propriété du triangle rectangle,

$$\overline{BG}^2 + \overline{FG}^2 = \overline{BF}^2 = \overline{AC}^2, \text{ et } BG = BF \cos GBF = AC \cos BAC,$$

il viendra

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AC \cos BAC;$$

en substituant les expressions des forces à la place des lignes droites qui leur sont proportionnelles, cette formule devient

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos BAC;$$

ce qui donne la valeur de la résultante

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos BAC}.$$

La règle que renferme cette formule peut être énoncée de la manière suivante : élevez au carré les nombres qui expriment les valeurs des forces P et Q, ajoutez à ces deux carrés le double produit des deux forces par le cosinus de l'angle compris entre leurs directions, ce qui formera une somme dont la racine carrée sera égale à la valeur de la résultante R des deux forces P et Q.

Si l'angle BAC était nul, son cosinus serait égal à l'unité, et la quantité qui est sous le radical serait le carré de $P + Q$; dans ce cas les deux forces agissent dans le même sens, sui-

vant une même ligne droite, et la résultante de ces deux forces est égale à leur somme.

Lorsque les deux forces P et Q sont égales, la direction AF de la résultante partage l'angle BAC en deux parties égales, et la formule générale devient :

$$R^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos BAC = 2P^2(1 + \cos 2BAF) = 4P^2 \cos^2 BAF;$$

en prenant la racine carrée de chaque membre, on a

$$R = 2P \cos BAF.$$

C'est-à-dire que la valeur de la résultante de deux forces égales, est exprimée par le double produit de l'une de ces forces par le cosinus de la moitié de l'angle compris entre leurs directions.

Si l'angle $BAF = 90°$, le cosinus de cet angle étant zéro, la résultante sera nulle ; ce qui doit nécessairement avoir lieu, puisque les deux forces, qui sont égales, agissent suivant une même ligne droite, dans des directions opposées, et par conséquent elles se font équilibre.

16. Une force R appliquée au point A (*fig.* 6), étant donnée, on peut décomposer cette force en deux autres P et Q, appliquées au même point, et qui agissent suivant les lignes droites données AP, AQ.

Prenez, sur la direction AR de la force donnée, une distance AF pour représenter cette force, par le point F menez FC, FB, parallèles aux droites AP, AQ ; les forces P et Q, seront représentées par les côtés AB, AC, du parallélogramme ABFC.

La direction de la force R et celles de ses composantes inconnues P et Q, étant données, on peut trouver les valeurs

de ces deux dernières forces par le calcul, qui est souvent préférable aux constructions géométriques, parce que les erreurs de ces constructions n'ont point de limites déterminées entre lesquelles on puisse les resserrer, et que les résultats du calcul peuvent approcher de l'exactitude jusqu'à la limite où les erreurs deviennent inappréciables.

Les proportions entre les intensités des forces et les sinus des angles formés par leurs directions, donnent :

$$P : Q : R :: \sin CAF : \sin BAF : \sin BAC;$$

d'où l'on tire

$$\sin BAC : \sin CAF :: R : P = \frac{R \sin CAF}{\sin BAC};$$
$$\sin BAC : \sin BAF :: R : Q = \frac{R \sin BAF}{\sin BAC}.$$

Ces formules montrent que la valeur de chaque composante est exprimée par la force R multipliée par la fraction qui a pour numérateur le sinus de l'angle partiel alterne, ou non adjacent à cette composante, et pour dénominateur, le sinus de la somme des deux angles partiels, ou de l'angle formé par les directions des deux composantes.

Si l'angle BAC (*fig.* 7), formé par les directions des composantes P et Q est un angle droit, le rayon étant l'unité, on aura :

$$\sin BAC = 1, \quad \sin CAF = \cos BAF,$$
$$\sin BAF = \cos CAF.$$

Alors, les proportions précédentes deviennent

$$P : Q : R :: \cos BAF : \cos CAF : 1;$$
$$1 : \cos BAF :: R : P = R \cos BAF;$$
$$1 : \cos CAF :: R : Q = R \cos CAF;$$

ce qui fait voir que la force R étant décomposée en deux autres P et Q, dont les directions sont rectangulaires, chaque composante a pour valeur le produit de la force R par le cosinus de l'angle compris entre la direction de cette force et celle de la composante, ou le cosinus de l'angle partiel adjacent à cette composante.

On voit aussi, dans le parallélogramme rectangle ABFC, que chacune des deux composantes P, Q, de la force R, est représentée par la projection de cette force sur la direction de la composante; ainsi, la composante P est représentée par la projection AB de la force R sur la direction de la force P; c'est ce qu'on appelle la force *estimée* suivant cette direction.

Le théorème du parallélogramme des forces renferme la règle que l'on doit suivre pour chercher la résultante de deux forces données, qui agissent sur un même point; il est facile d'appliquer cette règle pour trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, comme nous allons le faire voir dans l'exemple suivant.

17. Trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un point matériel, et dont les directions sont situées dans un même plan.

Soient mA, mA', mA'', mA''', mA^{IV} (*fig.* 8) les directions et les valeurs des forces données.

Formons le parallélogramme $mABA'$, et menons la diagonale mB, qui sera la résultante des deux forces mA, mA'; décrivons le parallélogramme $mBCA''$, la diagonale mC de ce parallélogramme, sera la résultante des forces mB, mA'', ou des trois forces mA, mA' et mA''; en continuant la construction de la même manière, la diagonale mD, du troisième parallélogramme $mCDA'''$, sera la résultante des quatre forces

mA, mA', mA'', mA'''; et la diagonale mE, du quatrième parallélogramme $mDEA^{\text{IV}}$, sera la résultante des cinq forces mA, mA', mA'', mA''' et mA^{IV}.

Il est facile de voir que cette construction peut être abrégée, car il suffit de mener AB, BC, CD, DE, respectivement égales et parallèles à mA', mA'', mA''', mA^{IV}; et la résultante R des cinq forces appliquées au point m, sera représentée par la ligne droite mE, qui joint les côtés extrêmes de la portion de polygone $mABCDE$.

Pour faire équilibre aux cinq forces mA, mA', mA'', mA''', mA^{IV}, il faut appliquer au point m, une force S égale et directement opposée à la résultante R de ces forces.

18. Le procédé par lequel on décompose une force, appliquée à un point matériel, en deux forces appliquées au même point, et qui agissent suivant deux lignes droites perpendiculaires, peut être appliqué aux trois dimensions, c'est-à-dire qu'une force dont le point d'application est donné, ainsi que sa direction et sa grandeur, peut être décomposée en trois autres, appliquées au même point, et qui sont dirigées suivant trois axes rectangulaires.

Soit m (*fig.* 9), le point d'application de la force donnée, et mC la ligne droite qui représente la direction et la grandeur de cette force; par le point m, menons les trois axes rectangulaires mX, mY, mZ, qui déterminent la position de chacun des trois plans XmY, XmZ, YmZ, et par le point C, menons trois autres plans, respectivement parallèles aux trois premiers; ces six plans forment le parallélépipède rectangle $mA'C'ADA''EC$ dont la ligne droite mC est la diagonale.

La force donnée R est décomposée en trois autres, dont les directions et les valeurs sont représentées par les trois

arêtes mA, mA', mA'', du parallélépipède $mA'C'ADA''EC$; en effet, la figure $mC'CA''$ est un parallélogramme rectangle, la diagonale mC de ce rectangle représente la force donnée, qui a pour composantes les forces représentées par les côtés mA'' et mC'; mais la force représentée par la droite mC' est la diagonale du rectangle $AmA'C'$, et les côtés mA, mA', représentent les composantes de cette dernière force.

Dans le triangle rectangle $mC'C$, en observant que $CC' = mA''$, on a $\overline{mC}^2 = \overline{mA''}^2 + \overline{mC'}^2$; et le triangle rectangle mAC' donne $\overline{mC'}^2 = \overline{mA}^2 + \overline{AC'}^2$ ou $\overline{mA'}^2$; cette valeur de $\overline{mC'}^2$ étant substituée dans la première équation, on aura

$$\overline{mC}^2 = \overline{mA}^2 + \overline{mA'}^2 + \overline{mA''}^2.$$

La force donnée étant représentée par R, si l'on désigne ses trois composantes par X, Y, Z, on aura la formule générale

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

C'est la valeur de la force donnée en fonction de ses trois composantes.

19. Cherchons maintenant la valeur de chacune des composantes en fonction de la force donnée, ou de la résultante.

Nous désignerons par a, b, c, les angles compris entre la direction de la force donnée et les trois axes rectangulaires; c'est-à-dire que nous ferons, pour abréger, $CmA = a$, $CmA' = b$, $CmA'' = c$.

Les triangles rectangles mAC, $mA'C$, $mA''C$, donnent les proportions

$$1 : \cos a :: mC : mA :: R : X = R \cos a;$$
$$1 : \cos b :: mC : mA' :: R : Y = R \cos b;$$
$$1 : \cos c :: mC : mA'' :: R : Z = R \cos c.$$

Lorsque deux des trois quantités que renferment ces équations seront données, on en déduira la valeur de la troisième; ainsi l'on pourra calculer les valeurs des composantes lorsqu'on connaîtra la force R et les angles formés par sa direction avec les trois axes rectangulaires.

En ajoutant les carrés de chaque membre des trois dernières équations, on aura

$$R^2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

mais d'après la formule de l'art. (**18**), le premier membre de cette équation doit se réduire au premier facteur R^2, ce qui exige que l'on ait $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$; c'est la relation qui doit exister entre la somme des carrés des cosinus des angles formés par une ligne droite avec trois axes rectangulaires, lorsque cette droite passe par l'origine des axes.

Si la direction de la force R est située dans le plan de deux axes, par exemple, dans le plan des XY, on aura $Z = 0$, $\cos c = \cos 90^\circ = 0$; alors les équations précédentes deviendront

$$R^2 = X^2 + Y^2; \quad X = R\cos a, \quad Y = R\cos b.$$

On obtiendrait directement ces équations, en considérant les forces qui agissent suivant les côtes du parallélogramme rectangle $mAC'A'$, et leur résultante, représentée par la diagonale de ce rectangle.

20. Trouver la résultante de plusieurs forces appliquées à un point, et dont les directions forment des angles connus avec trois axes rectangulaires; l'origine de ces axes étant au point d'application des forces données.

Soient les trois forces P, P', P'' (*fig.* 19), appliquées au point m; désignons par α, β, γ, les angles DmX, DmY, DmZ,

formés par la force P avec les trois axes rectangulaires mX, mY, mZ; et par α', β', γ'; α'', β'', γ'', les angles formés par les deux autres forces P′, P″, avec les mêmes axes.

Décomposons chacune de ces forces en trois autres, dirigées suivant les axes mX, mY et mZ; les composantes des forces P, P′, P″, seront exprimées par les produits

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma;$$
$$P'\cos\alpha', \quad P'\cos\beta', \quad P'\cos\gamma';$$
$$P''\cos\alpha'', \quad P''\cos\beta'', \quad P''\cos\gamma''.$$

Ces composantes pourront être positives ou négatives; dans le premier cas, elles agiront suivant les axes, et dans le second cas elles seront dirigées suivant leurs prolongements, du côté opposé à celui des composantes positives; par exemple, la direction mD de la force P est au-dessus du plan XmY, et la composante $md'' = P\cos\gamma$, qui agit suivant mZ, tend à élever le point m; alors on a $\gamma < 90°$, et le produit $P\cos\gamma$ est positif; si la direction de la force P tombait au-dessous du plan XmY, la composante $P\cos\gamma$ agirait suivant le prolongement mz de l'axe, elle tendrait à abaisser le point m; on aurait $\gamma > 90°$, et cette composante serait négative. On voit, d'après ces observations, que toutes les composantes dirigées suivant un même axe, se réduisent à une seule force, qui est la somme de toutes ces composantes, en ayant égard à leurs signes.

En désignant par X, Y, Z, les composantes des forces P, P′, P″, qui agissent suivant les trois axes rectangulaires, on aura

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'';$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'';$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma''.$$

Ces valeurs de X, Y, Z, pourront être positives ou négatives: si la force X est positive, elle agira suivant l'axe mX, dans le sens des composantes positives; si elle est négative, elle agira suivant le prolongement du même axe, dans le sens des composantes négatives.

Soit R la résultante des trois forces X, Y, Z, ou des forces données P, P′, P″; si l'on désigne par a, b, c, les angles que la direction inconnue de cette résultante fait avec les axes mX, mY, mZ, on aura les équations suivantes:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad R + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$
$$R \cos a = X, \quad \cos a = \frac{X}{R};$$
$$R \cos b = Y, \quad \cos b = \frac{Y}{R};$$
$$R \cos c = Z, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

La première de ces équations fera connaître la valeur de la résultante, et les trois autres serviront à déterminer la ligne droite suivant laquelle cette résultante est dirigée.

Si les forces P, P′, P″, sont en équilibre, on aura

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0;$$

cette équation ne peut avoir lieu que dans le cas où l'on a

$$X = 0, \ Y = 0, \ Z = 0;$$

parce que les trois quantités qui sont sous le radical sont positives, et que la somme de trois quantités positives ne peut être égale à zéro, que dans le cas où chacune de ces quantités est nulle; alors on aura

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' = 0;$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' = 0;$$
$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' = 0.$$

Ce sont les équations d'équilibre des forces P, P', P'', appliquées à un point libre; ces équations expriment que la somme des composantes dirigées suivant chacun des axes, doit être égale à zéro.

Lorsque l'équilibre existe entre les forces P, P', P'', chacune de ces forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. En effet, si à la place des forces P', P'', on substitue leur résultante R', on aura les deux forces P et R', qui seront en équilibre; donc ces deux forces doivent être égales et directement opposées.

Si toutes les forces sont dans le même plan, par exemple, dans le plan XmY, leur résultante sera aussi dans ce plan; les angles que nous avons désignés par γ, γ', γ'', seront droits; ainsi l'on aura

$$Z = 0;\quad \cos\gamma = 0,\ \cos\gamma' = 0,\ \cos\gamma'' = 0;$$
$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'';$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta''.$$

On obtiendrait directement ces équations, en décomposant chacune des forces P, P', P'', situées dans le plan XmY, en deux autres, dirigées suivant les axes rectangulaires mX, mY.

Si toutes ces forces sont en équilibre, on aura

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' = 0;$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' = 0.$$

Ces deux équations expriment que les composantes dirigées suivant chacun des axes se détruisent.

CHAPITRE III.

COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE.

21. Nous avons fait connaître, dans le chapitre précédent, le théorème du parallélogramme des forces; on a vu que ce théorème fournit tous les moyens qui sont nécessaires pour la composition et la décomposition des forces appliquées à un même point : avec la connaissance de ce principe fondamental, et des conséquences qui s'en déduisent, on sait déterminer les lois de l'équilibre d'un point matériel, lorsque les forces qui lui sont appliquées sont connues. Nous allons maintenant nous occuper des lois de l'équilibre d'un corps solide de forme quelconque, sollicité par des forces appliquées à différents points; nous supposerons d'abord que les directions de toutes ces forces sont situées dans un même plan.

§ 1. *Des forces parallèles.*

Soient P et Q (*fig.* 11), deux forces appliquées aux extrémités E et F de la ligne droite inflexible EF, et représentées par les longueurs EA, FB, prises sur leurs directions.

Il peut arriver deux cas, suivant que les directions des deux forces P et Q seront obliques à la ligne droite EF, ou bien suivant qu'elles seront perpendiculaires à cette droite; nous commencerons par le premier cas, et nous ferons voir ensuite que le deuxième peut s'en déduire.

Les directions des forces P et Q étant obliques sur la ligne

droite EF, de sorte que la somme des angles qu'elles font intérieurement, au-dessus de cette ligne, est moindre que deux angles droits, elles peuvent être prolongées jusqu'à leur rencontre au point O, et l'on peut transporter le point d'application de chaque force à ce même point O d'intersection (6).

Prenez $Oa = EA$, $Ob = FB$, et achevez le parallélogramme $Oacb$, la diagonale Oc de ce parallélogramme sera la résultante R des deux forces P et Q; si l'on prolonge cette diagonale, elle coupera la ligne droite EF au point I, que l'on pourra prendre pour le point d'application de la résultante R; sa grandeur sera représentée par $IC = Oc$.

Dans le triangle Oac, le côté $ac = Ob$, l'angle $acO = BOC$, et les côtés, sont proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés, ce qui donne la proportion

$$P : Q :: Oa : ac :: \sin BOC : \sin AOC.$$

Si du point I, pris sur la résultante, on abaisse IG, IH, perpendiculaires sur les directions OA, OB, des forces P et Q, on aura

$$OI : IG :: 1 : \sin AOC = \frac{IG}{OI},$$
$$OI : IH :: 1 : \sin BOC = \frac{IH}{OI};$$

en substituant ces valeurs de sin BOC, sin AOC, la première proportion deviendra

$$P : Q :: IH : IG;$$

c'est-à-dire que les forces P, Q, sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d'un point quelconque de leur résultante.

En comparant la résultante à l'une des composantes, on a la proportion

$$R : Q :: \sin AOB : \sin AOC;$$

si d'un point quelconque h de la direction de la force P, on abaisse he, hf perpendiculaires sur les directions de la résultante R et de la force Q, on aura

$$Oh : hf :: 1 : \sin AOB = \frac{hf}{Oh},$$
$$Oh : he :: 1 : \sin AOC = \frac{he}{Oh};$$

en substituant ces valeurs à la place de sin AOB, sin AOC, il viendra

$$R : Q :: hf : he;$$

ainsi, lorsqu'on a deux forces et leur résultante, si d'un point quelconque pris sur la direction de l'une de ces trois forces, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des deux autres, ces deux forces seront réciproquement comme les perpendiculaires.

22. Le théorème que nous venons de démontrer aura lieu quelque petit que soit l'angle AOB, formé par les directions des forces P et Q; il sera encore vrai lorsque cet angle sera nul, ce qui arrivera si l'on suppose que la direction FB de la force Q tourne autour de son point d'application F, jusqu'à ce qu'elle soit parvenue dans la direction FB′ parallèle à EA; alors les perpendiculaires IG, IH, seront dans la même direction et ne formeront qu'une même ligne droite H′G; la résultante R partagera cette droite en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces P, Q, et l'on

aura

$$P : Q :: IH' : IG;$$

$$P + Q : P :: IH' + IG \text{ ou } GH' : IH' = \frac{GH' \times P}{P + Q}.$$

Cette valeur de IH′ exprime la distance comprise entre la direction de la résultante et la direction FB′ de la force Q; cette distance sera toujours la même, quelle que soit la position du point I sur OC, puisque les quantités GH′, P et Q sont constantes; par conséquent la direction IC′ de la résultante est parallèle à celles des composantes.

Il reste encore à trouver la valeur de la résultante, lorsque les directions des composantes sont parallèles. En considérant H′I, H′G comme deux perpendiculaires abaissées d'un point H′ de la direction de la force Q, sur les directions de la résultante R et de la force P, ces deux forces seront réciproquement comme les perpendiculaires, ce qui donnera

$$R : P :: H'G : H'I = \frac{H'G \times P}{R};$$

en égalant cette valeur de H′I à celle que nous avons déjà trouvée, nous aurons

$$\frac{GH' \times P}{P + Q} = \frac{H'G \times P}{R}, \quad R = P \quad Q.$$

Donc, lorsque deux forces parallèles agissent dans le même sens :

1°. La résultante de ces forces partage la ligne droite qui mesure leur distance en deux parties réciproquement proportionnelles aux composantes;

2°. La direction de cette résultante est parallèle à celles des composantes;

3°. La valeur de la résultante des deux forces est égale à leur somme.

23. On voit, par cette dernière proposition, que la composition des forces parallèles peut être considérée comme une conséquence de la composition des forces dont les directions se rencontrent, en supposant le point de concours à une distance infinie: cette généralité du parallélogramme des forces ne devait pas être omise, mais la composition des forces parallèles peut être démontrée d'une autre manière, sans employer la notion de l'infini.

Soient P et Q (*fig.* 12), deux forces qui agissent dans le même sens, et qui sont représentées par les lignes droites parallèles MA, NB, appliquées aux extrémités M et N de la ligne droite MN; il s'agit de trouver la résultante de ces deux forces.

Nous pouvons, sans rien changer au système, appliquer aux extrémités de la ligne droite MN, deux forces p, q, égales et opposées, représentées par les droites égales MM′, NN′: décrivons les parallélogrammes MAA′M′, NBB′N′, et menons les diagonales MA′, NB′, que nous prolongerons jusqu'à leur rencontre au point O.

La résultante P′ des forces P et p, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale MA′, et la résultante Q′ des forces Q et q, est représentée par la diagonale NB′: appliquons ces deux résultantes au point O; la première sera représentée par $Oa' = MA'$, et la seconde par $Ob' = NB'$.

Par le point O, menons deux lignes droites: l'une M″N″ parallèle à MN, et l'autre OC parallèle à MA; prenons $OM'' = MM'$, $ON'' = NN'$, et achevons les parallélogrammes OM″$a'a$, ON″$b'b$; à la place des deux résultantes P′, Q′, nous pouvons substituer leurs composantes p, P, q, Q, ap-

pliquées au point O; les deux forces égales et opposées p, q, se détruisent, et les deux autres P, Q, qui agissent suivant OC, forment la résultante demandée; ainsi l'on a

$$P + Q = R.$$

Donc la résultante R de deux forces parallèles P et Q, qui agissent dans le même sens, est égale à leur somme, et sa direction est parallèle à celles des composantes.

24. Pour trouver le point L, où la direction de la résultante R des forces P et Q coupe la droite MN, nous observerons que les forces P et p sont représentées par les droites Oa, aa', et que les triangles semblables Oaa', OLM, donnent la proportion

$$P : p :: OL : LM;$$

les forces Q et q, sont représentées par Ob, bb', et les triangles semblables Obb', OLN, donnent

$$q : Q :: LN : OL.$$

En multipliant ces deux proportions terme à terme, et négligeant les termes égaux, qui seraient facteurs communs dans les deux termes de chaque rapport, il viendra

$$P : Q :: LN : LM;$$

c'est-à-dire que la direction de la résultante des deux forces P et Q, coupe la ligne droite MN, comprise entre leurs directions, en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces.

La proportion que nous venons de trouver est indépendante de l'angle que fait la ligne droite MN avec la direc-

tion de chacune des composantes, et par conséquent elle aura lieu quelle que soit la position de la ligne droite MN, menée entre les directions des composantes.

Cette dernière proportion donne

$$P : P + Q :: LN : LN + LM,$$
$$Q : P + Q :: LM : LN + LM.$$

En réunissant ces proportions, et observant que $P + Q = R$, et $LN + LM = MN$, on aura

$$P : Q : R :: LN : LM : MN;$$

ce qui fait voir que chacune des forces P, Q et R, est proportionnelle à la partie de la ligne droite MN comprise entre les directions des deux autres.

Pour mettre en équilibre deux forces parallèles P et Q, qui agissent dans le même sens, et qui sont appliquées aux extrémités d'une ligne droite MN, il faut partager cette droite en deux parties LM, LN, réciproquement proportionnelles aux forces données P et Q, et appliquer au point de division L, une force égale à leur somme $P + Q$; de manière que cette nouvelle force, égale à la résultante, agisse parallèlement aux composantes et dans la direction opposée.

Dans un système libre, lorsque les forces ne se détruisent pas, on établit l'équilibre en ajoutant une force égale et opposée à la résultante; si le système n'était pas libre, et qu'il y eût au point L, où doit être appliquée la résultante, un obstacle capable de détruire l'action des forces P et Q, l'équilibre existerait sans qu'il fût nécessaire d'introduire une nouvelle force.

Il est facile de trouver le point d'application L, ou la distance NL, car on a

$$P + Q : P :: MN : NL = \frac{MN \times P}{P + Q}.$$

25. On peut donner à la proportion générale que nous avons trouvée, une forme qui sera plus commode pour le calcul; nous représenterons par n la ligne droite MN, comprise entre les directions des forces parallèles P et Q, et par p, q, les parties LM, LN, de cette droite, comprises entre chacune de ces forces et leur résultante R, ce qui donnera

$$P : Q : R :: q : p : n;$$

d'où l'on tire

$$Pp = Qq.$$

Cette équation, et celle de l'article (23), donnent le moyen de trouver deux des six quantités P, Q, R, p, q, n, lorsque les quatre autres sont connues; nous en ferons l'application pour résoudre les problèmes suivants.

26. *Décomposer une force R en deux autres P et Q, appliquées à des points donnés, et qui agissent suivant des lignes droites parallèles à la direction de la force donnée.*

Les forces P et Q sont les inconnues des équations

$$P + Q = R, \quad Pp = Qq;$$

la première équation donne $Q = R - P$; cette valeur de Q étant substituée dans la seconde équation, il viendra

$$Pp = Rq - Pq,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{Rq}{p + q};$$

en substituant cette valeur de P, la première équation donnera

$$Q = R - \frac{Rq}{p+q} = \frac{Rp + Rq - Rq}{p+q} = \frac{Rp}{p+q}.$$

Les longueurs des lignes droites qui expriment les valeurs des forces P et Q, se trouveront en cherchant des quatrièmes proportionnelles, car les résultats que l'on vient de trouver renferment les proportions suivantes, dans lesquelles les trois premiers termes sont connus:

$$p+q : q :: R : P, \quad p+q : p :: R : Q.$$

Connaissant la résultante R et l'une des composantes P, de deux forces parallèles; trouver l'autre composante Q, et son point d'application.

Les quantités R, P et p sont données, et il ne reste que les inconnues Q et q, dans les deux équations

$$P + Q = R, \quad Pp = Qq;$$

la méthode des substitutions, que nous avons suivie dans le dernier problème, donnera

$$Q = R - P, \quad Pp = (R - P)q, \quad q = \frac{Pp}{R-P}.$$

La décomposition d'une force en deux autres qui lui sont parallèles, peut servir dans la recherche des pressions produites par un corps pesant, sur deux points déterminés; on verra, dans la suite de cet ouvrage, l'usage que l'on peut faire de cette décomposition, pour calculer les pressions exercées sur les supports, et pour donner à ceux-ci la solidité qu'exige l'usage pour lequel ils doivent être établis.

27. Trouver la résultante de deux forces parallèles qui agissent en sens contraire, et le point où cette résultante doit être appliquée.

Soient P et Q (*fig.* 13) deux forces parallèles appliquées aux points M et N de la ligne droite MN, et qui agissent en sens contraire; décomposons la plus grande des forces données Q en deux autres P′ et R, de sorte que la première P′ soit égale et directement opposée à la force P: il s'agit de trouver le point O, sur le prolongement de la ligne droite MN, où doit être appliquée la force $R = Q - P'$.

Chacune des trois forces P′, Q et $R = Q - P'$, est proportionnelle à la partie de la ligne droite MNO, comprise entre les directions des deux autres; ainsi l'on aura la proportion

$$R : P' :: MN : NO,$$

dans laquelle les trois premiers termes sont connus; pour trouver le quatrième terme, portez, sur la direction de la force P′, les distances M*c*, *cb*, égales aux lignes droites qui représentent les valeurs des forces R et P; joignez les points *c* et N, et par le point *b*, menez une parallèle à la droite *c*N, l'intersection O de cette parallèle et de la ligne droite MN prolongée déterminera le quatrième terme NO de la proportion; ainsi l'on connaîtra le point O où la seconde composante de la force Q doit être appliquée.

En substituant, à la place de la force Q, ses deux composantes P′ et $R = Q - P'$, la première détruira la force P, parce qu'elle lui est égale et directement opposée; il ne restera que la force R, qui est, par conséquent, la résultante des deux forces données P et Q.

Donc la résultante de deux forces parallèles, qui agissent en sens contraire, est égale à la différence de ces forces; elle agit

dans le sens de la plus grande, et sa direction est parallèle à celles des composantes.

28. Si les forces parallèles P et Q, qui agissent en sens contraire, sont égales, en substituant la valeur de $R = Q - P$, dans la proportion

$$R : P :: MN : NO,$$

il viendra

$$NO = \frac{MN \times P}{Q - P} = \frac{MN \times P}{0}.$$

Cette formule fait voir que la résultante serait une force nulle, appliquée à une distance infinie: en effet, deux forces égales et parallèles, qui agissent en sens contraire, et qui ne sont pas directement opposées, ne peuvent pas avoir de résultante, car si elles en avaient une, il n'y aurait pas de raison pour qu'elle agisse dans le sens de l'une des composantes plutôt que dans le sens de l'autre. Les forces P et Q auraient donc pour résultante deux forces égales et directement opposées, ainsi cette résultante est nulle; son point d'application devrait être à l'extrémité de la ligne droite NO, dont la longueur est représentée par une fraction qui a zéro pour dénominateur: c'est l'expression d'une grandeur infinie.

Quoique deux forces égales et parallèles, qui agissent en sens contraire, ne puissent pas être composées en une seule force qui leur soit équivalente, la considération de ce cas singulier conduit à des résultats très intéressants; M. Poinsot a donné le nom de *couple* au système de ces deux forces, et en combinant plusieurs couples, il en déduit une théorie de l'équilibre qui forme l'une des principales parties de ses *Éléments de Statique*. Nous renvoyons à cet ouvrage classique les personnes qui voudront étudier cette nouvelle branche de la Mécanique.

On peut faire plusieurs remarques sur les propositions qui viennent d'être démontrées.

Deux forces parallèles agissent dans un plan dont la position est déterminée par les directions de ces forces; la direction de leur résultante est située dans ce même plan, car si on la supposait en dehors, de l'un des côtés du plan, il n'y aurait pas de raison pour qu'elle ne fût semblablement placée du côté opposé. D'après cette supposition il pourrait y avoir deux résultantes, et comme il n'y en a qu'une, elle est dirigée suivant une droite tracée dans le plan des composantes.

Deux forces parallèles P, Q, et leur résultante R, sont telles que la plus grande de ces trois forces agit toujours suivant une ligne droite comprise entre les directions des deux autres.

Si les deux forces parallèles P et Q agissent dans le même sens, on a $R = P + Q$, et cette résultante R est comprise entre les directions des composantes. Lorsque les forces P et Q agissent en sens contraire, la direction de la plus grande de ces forces est située entre la direction de leur résultante et celle de l'autre force.

La proportion $P : Q :: q : p$ donne $Pp = Qq$; cette formule est indépendante de l'angle formé par les directions des forces parallèles P et Q avec la ligne droite $MN = p + q$, comprise entre ces directions.

Si MN est une ligne droite inflexible, posée sur un appui qui la divise en deux parties p et q, et que l'on suspende aux extrémités de cette droite deux poids P et Q, qui soient réciproquement comme les lignes p et q, de sorte que l'on ait l'équation $Pp = Qq$, qui se déduit de la proportion ci-dessus, les deux poids seront en équilibre. Cette équation exprime le

principe de l'équilibre du levier et de toutes les machines qui en dépendent; c'est l'une des découvertes d'Archimède, qui fut tué à la prise de Syracuse, l'an 212 avant J.-C. Ce grand géomètre avait inventé des machines assez puissantes pour défendre la ville, dont l'armée romaine, commandée par Marcellus, ne put s'emparer que par surprise.

29. Trouver la résultante de plusieurs forces parallèles, appliquées à un corps solide.

Soient les trois forces parallèles P, P′, P″ (*fig.* 14), appliquées aux points A, A′, A″, de la section MN d'un corps solide, et représentées par les longueurs AB, A′B′, A″B″, prises sur leurs directions.

La résultante des deux forces parallèles P, P′, est égale à leur somme; pour trouver sa position, nous mènerons d'abord la ligne droite AA′, qui joint leurs points d'application, et nous chercherons le quatrième terme de la proportion

$$P + P' : P :: AA' : x,$$

qui fera connaître le point de la ligne droite AA′ où la résultante doit être appliquée.

Sur la direction de la force P′, prolongée s'il est nécessaire, prenons les longueurs $A'e = AB = P$, $ef = A'B' = P'$; joignons les points f et A, et par le point e menons une parallèle à la droite fA, le point E où cette parallèle coupera la droite AA′, déterminera la valeur de $x = A'E$, et sera le point d'application de la résultante des deux forces P et P′; cette résultante agit suivant une parallèle aux composantes et elle est égale à leur somme; ainsi pour achever la construction il faut mener, par le point E, une ligne droite parallèle aux directions des forces P, P′, et prendre EC égale à la somme des lignes qui représentent ces deux forces.

En joignant les points d'application de la résultante des deux premières forces et celui de la troisième force, par la ligne droite EA″, et répétant les constructions qui viennent d'être décrites ; on trouvera que les deux forces Q et P″, ou les trois forces P, P′, P″, ont pour résultante une force R représentée par la ligne droite FD.

Si d'autres forces parallèles à celles que nous venons de composer, étaient appliquées au corps solide dont MN représente une section, la résultante de toutes ces forces se trouverait par le même procédé ; en composant la résultante des trois premières forces avec la quatrième, on trouverait la résultante de ces quatre forces ; pour avoir la résultante de cinq forces, on composerait la résultante des quatre premières forces avec la cinquième, et ainsi de suite.

Les trois forces P, P′, P″, ont leurs points d'application dans un même plan, parce que la position d'un plan est déterminée par trois points non en ligne droite ; ce plan renferme aussi le point d'application F de la résultante des trois forces. En général, si un nombre quelconque de forces parallèles sont appliquées à un même plan, le point d'application de leur résultaute sera aussi dans ce plan. Si plusieurs forces parallèles sont appliquées à une ligne droite, le point d'application de leur résultante sera situé sur cette droite

Les trois forces P, P′, P″, que nous venons de composer, peuvent être remplacées par leur résultante R, et si l'on ajoute une force S, égale et directement opposée à cette résultante, le système restera en équilibre.

Lorsque les forces parallèles appliquées à un corps solide n'agissent pas toutes dans le même sens, on cherche, par la méthode qui vient d'être expliquée, la résultante de toutes les forces qui agissent dans un sens ; on cherche ensuite la

résultante des forces qui agissent dans le sens opposé, ce qui réduit le système à deux forces parallèles qui agissent en sens contraire; si ces deux forces sont inégales, on les composera en une seule (27), qui sera la résultante de toutes les forces du système; cette résultante sera égale à la différence entre la somme des forces qui agissent dans un sens et celle des forces qui agissent dans le sens opposé.

Dans le cas où les deux résultantes parallèles, qui agissent en sens contraire, sont égales, leur composition devient impossible (28), c'est-à-dire que le système ne peut pas être mis en équilibre par une seule force.

Les forces P, P′, P″, appliquées au corps solide MN, étant supposées tourner simultanément autour de leurs points d'application A, A′, A″, en restant parallèles et conservant les mêmes valeurs, ces forces désignées par p, p', p'', dans leur nouvelle direction, n'éprouveront aucun changement dans leur composition; en effet, la résultante q des deux forces parallèles p, p', est égale à leur somme; cette résultante agit suivant une ligne droite qui leur est parallèle et qui coupe la droite AA′ en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces p et p'; donc ce point d'intersection, que l'on peut prendre pour le point d'application de la résultante, coïncide avec le point E. On prouvera de la même manière que la résultante r, des trois forces p, p', p'', qui est égale à leur somme, a son point d'application au même point F de la droite EA″, que la résultante R des trois forces P, P′, P″; s'il y avait un plus grand nombre de forces parallèles, le point d'application de leur résultante resterait toujours le même, dans tous les changements que l'on pourrait donner à leur direction. Les grandeurs de toutes ces forces pourraient être augmentées ou diminuées proportion-

nellement, ce qui changerait la valeur de la résultante, sans produire aucun déplacement dans la position du point où elle est appliquée. Ce point remarquable se nomme *centre des forces parallèles;* nous verrons plus loin la manière de le déterminer dans les corps sollicités par la pesanteur.

Si un corps est sollicité par un nombre quelconque de forces parallèles, et qu'après avoir déterminé le point où se trouve le centre de ces forces on le rende fixe, le corps restera en équilibre dans toutes les positions qu'on pourra lui donner autour de ce point, pourvu que les points d'application des forces restent les mêmes, et qu'elles ne cessent pas d'être parallèles; en effet, la résultante de ces forces sera détruite, parce qu'elle passera toujours par le point fixe.

30. Le centre d'un système de forces parallèles peut être déterminé d'une manière très simple par le calcul, quel que soit le nombre de ces forces; nous allons chercher les formules générales qui servent à résoudre ce problème.

Soient M, M', M'' (*fig.* 14[a]), les points d'application de trois forces parallèles P, P', P''; menons trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, de manière que l'axe OZ soit parallèle aux directions des forces; ces directions étant prolongées, elles rencontreront le plan des axes OX, OY, ou le plan des x, y, aux points E, E', E''.

Menons la ligne droite MM', et composons les deux forces P, P', nous aurons

$$P + P' : P' :: MM' : MN;$$

cette proportion fait connaître le point d'application N de la résultante Q des deux forces P et P', elle sera donc dirigée suivant la droite NF, parallèle aux composantes, et elle rencontrera le plan des x, y au point F.

6..

Les projections des points d'application M, N et M', sur le plan des x, y, sont sur une même ligne droite EFE'; par le point M menons la droite MH parallèle à EE', nous aurons $ME = GF = HE'$, et le triangle rectangle MHM' donnera

$$MM' : MN :: M'H : NG;$$

en substituant le second rapport de cette proportion à celui de la proportion précédente, on aura l'équation

$$(P + P') \times NG = P' \times M'H;$$

ajoutant l'équation identique

$$(P + P') \times GF = P \times ME + P' \times HE',$$

et observant que les ordonnées $ME = z$, et $M'H + HE' = M'E' = z'$, il viendra

$$(P + P') \times NF = Pz + P'z'.$$

En joignant les points d'application N et M'' par la ligne droite NM'', on trouvera, sur cette droite, le point d'application de la résultante des forces Q, ou $P + P'$, et P'', par la proportion suivante:

$$P + P' + P'' : P'' :: M''N : NN',$$

la résultante de ces trois forces sera dirigée suivant la droite menée par le point N', parallèlement aux composantes, elle rencontrera le plan des x, y au point F', sur la droite qui joint F et E''; par le point N menons NH' parallèle à cette droite, nous aurons

$$M''N : NN' :: M''H' : N'G';$$

ces deux proportions donnent

$$(P + P' + P'') \times N'G' = P'' \times M''H';$$

cette équation étant ajoutée à l'équation identique

$$(P + P' + P'') \times G'F' = (P + P') \times NF + P'' \times H'E'',$$

il viendra

$$\begin{aligned}(P + P' + P'') \times N'F' &= (P + P') \times NF + P'' \times M''E'' \\ &= Pz + P'z' + P''z''.\end{aligned}$$

On composerait de la même manière une quatrième force avec les trois premières, une cinquième force avec les quatre premières, etc.

Soit R la résultante de toutes les forces; en désignant par Z l'ordonnée du point d'application de cette résultante, on aura

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.},$$
$$RZ = Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}$$

La première de ces équations exprime que la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, qui agissent dans le même sens, est égale à la somme des composantes; la seconde équation fera connaître la distance du centre des forces parallèles au plan des x, y, lorsqu'on connaîtra les forces et les perpendiculaires abaissées de leurs points d'application sur ce plan.

Nous avons supposé que toutes les forces agissent dans le même sens, et que leurs points d'application sont situés au-dessus du plan des x, y; alors tous les termes de l'équation que nous venons de trouver sont positifs; si les forces n'agis-

saient pas toutes dans le même sens, il faudrait avoir égard aux sens d'action, et en considérant celles qui agissent dans un sens comme positives, celles qui agiraient dans le sens contraire devraient être prises avec le signe négatif: il en serait de même pour les points d'application, s'il y en avait de situés au-dessus et au-dessous du plan des x, y, les premiers étant positifs, les seconds seraient négatifs.

Le produit d'une force par la distance de son point d'application à un plan fixe, est une quantité qui se présente souvent dans les questions d'équilibre; on a donné à ce produit le nom de *moment* par rapport au plan; ainsi le produit RZ est le moment de la résultante R des forces P, P', P'', etc., et les produits Pz, $P'z'$, $P''z''$, etc., sont les moments des composantes par rapport au plan des x, y, et l'équation que nous venons de trouver fait voir que le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan, est égal à la somme des moments de ces forces par rapport au même plan.

Le moment d'une force est positif, dans le cas où cette force et la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan sont de même signe; lorsque ces deux quantités sont de signe contraire, le moment est négatif.

Si l'on prend successivement les moments des forces P, P', P'', etc., par rapport aux plans des y, z et des x, z, on aura les deux équations suivantes:

$$RX = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.},$$
$$RY = Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}$$

On a donc trois équations pour déterminer la position du centre d'un nombre quelconque de forces parallèles; celle que nous avons trouvée directement, par rapport au plan des

x, y, donne

$$Z = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}}{R}.$$

Cette valeur de Z ne suffirait pas pour déterminer le centre des forces parallèles, elle indique seulement qu'il est situé sur un plan parallèle à celui des x, y; et que ces deux plans sont à une distance Z l'un de l'autre.

Les deux autres équations font connaître que le centre des forces parallèles se trouve aussi sur deux autres plans, dont l'un est parallèle au plan des y, z, il en est éloigné d'une quantité X, et l'autre est parallèle au plan des x, z, à une distance Y de ce plan; le centre des forces parallèles est à l'intersection commune de ces trois plans.

La résultante des forces parallèles P, P′, P″, etc., sera dirigée suivant une ligne droite menée par leur centre, parallèlement à leur direction commune; si elles agissent toutes dans le même sens, la résultante sera égale à leur somme; si les forces n'agissent pas toutes dans le même sens, leur résultante sera égale à la différence entre la somme de celles qui agissent dans un sens et la somme de celles qui agissent dans le sens opposé, elle agira dans le sens de la plus grande somme.

La somme des moments des forces parallèles P, P′, P″, etc., est nulle par rapport à tout plan passant par le centre de ces forces.

En effet, si le centre des forces parallèles est situé dans le plan des x, y, ou dans un plan qui lui soit parallèle, en prenant les moments par rapport à ce plan, on aura

$$Z = 0, \quad Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.} = 0.$$

Si les forces parallèles se réduisent à deux, égales et diri-

gées en sens contraire, sans être directement opposées, elles n'auront pas de centre; car leur résultante R sera égale à zéro, et les coordonnées X, Y, Z, du centre seront infinies, puisque ces coordonnées, prises dans les équations précédentes, auront zéro pour dénominateur.

Lorsque les forces parallèles ont leurs points d'application M, M', M'', etc., dans un plan donné, par exemple, dans le plan des x, y, le centre des forces est situé dans ce plan, si ce centre existe; alors on a $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, etc., et par conséquent $Z=0$; la position du centre des forces ne dépend que des deux coordonnées X et Y, qui seront déterminées par les deux équations

$$RX = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.},$$
$$RY = Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}$$

Si les points d'application M, M', M'', etc., sont situés sur une même ligne droite, le centre des forces sera sur cette droite, et pour le trouver, il suffira de déterminer sa distance à un point fixe pris sur cette ligne.

En prenant la droite sur laquelle se trouvent les points d'application des forces pour l'axe des x, on aura

$$z = 0,\ z' = 0,\ \text{etc. et } Z = 0;$$
$$y = 0,\ y' = 0,\ \text{etc.} \quad Y = 0.$$

La distance X de l'origine O au centre des forces parallèles, sera déterminée par l'équation

$$X = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{R}.$$

Si les forces sont situées de part et d'autre du point O,

pris pour origine des distances, les valeurs de ces distances, ou les abscisses x, x', x'', etc., étant positives dans la direction OO, elles seront négatives dans la direction opposée.

§ II. *Des Moments.*

30. On appelle moment d'une force, par rapport à un point, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction; le point d'où l'on abaisse les perpendiculaires, sur les directions de plusieurs forces, se nomme le *centre des moments* de ces forces.

Le moment de la résultante de deux forces, par rapport à un point de leur plan, pris hors de l'angle formé par les directions de ces forces, est égal à la somme des moments de ces forces; et si le centre des moments est pris dans l'intérieur de l'angle formé par les directions des forces, le moment de la résultante sera égal à la différence des moments de ces forces.

Premier cas. — Soient P, P', deux forces (*fig.* 15), représentées par les droites mA, mA', et R leur résultante, représentée par mB; prenons le centre C des moments hors de l'angle AmA', formé par les directions des forces; menons la droite Cm, et par le point m menons KL perpendiculaire à Cm.

Décomposons chacune des forces données P, P', en deux autres forces rectangulaires, l'une dirigée suivant KL et l'autre suivant mC; en considérant les composantes dirigées suivant KL, nous aurons

$$R \cos BmL = P \cos AmL + P' \cos A'mL;$$

l'angle BmL étant le complément de l'angle BmC, on a

$$\cos BmL = \sin BmC,$$

le triangle rectangle mbC donne la proportion

$$mC : Cb :: 1 : \sin BmC = \frac{Cb}{mC};$$

on aura, par un raisonnement semblable,

$$\cos AmL = \sin AmC = \frac{Ca}{mC},$$
$$\cos A'mL = \sin A'mC = \frac{Ca'}{mC};$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, on aura

$$R \times \frac{Cb}{mC} = P \times \frac{Ca}{mC} + P' \times \frac{Ca'}{mC};$$

en supprimant le dénominateur mC, commun à tous les termes de cette équation, et faisant, pour abréger,

$$Cb = q, \quad Ca = p, \quad Ca' = p',$$

il viendra

$$Rq = Pp + P'p'.$$

Second cas. — Si le centre C des moments est situé dans l'intérieur de l'angle AmA', formé par les directions des deux forces P, P' (*fig.* 16), on aura encore la formule générale

$$R \cos BmL = P \cos AmL + P' \cos A'mL;$$

mais on remarquera, dans la figure, que les deux angles BmL, AmL, sont obtus, leurs cosinus sont égaux, et de signe contraire, aux cosinus des angles BmK, AmK, qui sont leurs suppléments; ainsi la formule devient

$$R \cos BmK = P \cos AmK - P' \cos A'mL;$$

on a aussi, comme dans le premier cas :

$$\cos \mathrm{B}m\mathrm{K} = \sin \mathrm{B}m\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}b}{m\mathrm{C}} = \frac{q}{m\mathrm{C}},$$
$$\cos \mathrm{A}m\mathrm{K} = \sin \mathrm{A}m\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}a}{m\mathrm{C}} = \frac{p}{m\mathrm{C}},$$
$$\cos \mathrm{A}'m\mathrm{L} = \sin \mathrm{A}'m\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}a'}{m\mathrm{C}} = \frac{p'}{m\mathrm{C}};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation, et négligeant le dénominateur commun $m\mathrm{C}$, il viendra

$$\mathrm{R}q = \mathrm{P}p - \mathrm{P}'p'.$$

Ces deux cas sont réunis dans la formule suivante

$$\mathrm{R}q = \mathrm{P}p \pm \mathrm{P}'p',$$

qui exprime que le moment de la résultante de deux forces est égal à la somme ou à la différence des moments de ces forces.

On prendra le signe + lorsque le centre des moments sera hors de l'angle formé par les directions des forces, et le signe — lorsque le centre sera dans l'intérieur de cet angle, ou dans son opposé au sommet.

31. Le théorème que nous venons de démontrer peut être énoncé d'une autre manière, d'après les considérations suivantes.

Si le centre C est un point fixe, et que les perpendiculaires Ca, Ca', Cb, soient des lignes droites inflexibles, on pourra considérer les forces P, P', et leur résultante R comme agissant sur les points a, a', b, pour les faire tourner autour du centre C. Lorsque ce centre est hors de l'angle formé par les directions des forces (*fig.* 15), on voit que les forces tendent à faire tourner les points a, a', b, dans le même

sens. Si le centre C des moments est situé dans l'angle AmA', formé par les directions des forces (*fig.* 16), les forces P, P', tendent à faire tourner les points a, a', en sens opposé, et la résultante R tend à faire tourner le point b dans le même sens que la plus grande composante. Il résulte de ces observations, que le théorème des moments peut être énoncé de la manière suivante.

Le moment de la résultante de deux forces, par rapport à un point situé dans leur plan, est égal à la somme ou à la différence des moments de ces forces, suivant qu'elles tendent à faire tourner leurs points d'application dans le même sens ou dans des sens opposés, autour du centre des moments regardé comme un point fixe.

Lorsqu'un nombre quelconque de forces P, P', P'', P''', etc., dont la résultante est représentée par R, sont appliquées à un point, et que les lignes droites suivant lesquelles ces forces agissent, sont situées dans un plan, si d'un point de ce plan, pris hors de l'angle formé par les directions des forces, on abaisse, sur ces directions, les perpendiculaires p, p', p'', p''', etc., r étant la perpendiculaire abaissée sur la direction de la résultante, on aura

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.}$$

On cherchera d'abord la résultante Q des deux forces P, P', en désignant par q la perpendiculaire abaissée du centre des moments sur la direction de cette résultante, on aura

$$Qq = Pp + P'p';$$

la force Q étant composée avec P'', on trouvera une seconde résultante partielle Q', sur laquelle on abaissera la perpen-

diculaire q', ce qui donnera

$$Q'q' = Qq + P''p'' = Pp + P'p' + P''p'';$$

en répétant le même procédé pour chacune des autres forces P''', etc., on trouvera la formule qui exprime que le moment de la résultante est égal à la somme des moments de toutes les composantes.

Si le centre des moments est placé dans l'angle formé par les directions des forces, on trouvera que le moment de la résultante est égal à la différence entre la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le système dans un sens et la somme de ceux qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé.

Ce théorème a lieu quel que soit l'angle AmA' formé par les directions des forces; on pourrait en conclure qu'il est encore vrai lorsque cet angle est nul, et que les directions des forces sont parallèles; mais la vérité d'un principe d'une aussi grande importance que celui des moments, pour le cas des forces parallèles, ne doit pas être admis sur une simple induction, et d'ailleurs sa démonstration directe est facile, comme on le verra dans la proposition suivante.

32. Si l'on mène une ligne droite perpendiculaire à deux forces parallèles qui agissent dans le même sens, et que l'on prenne un point sur cette perpendiculaire, pour centre des moments : le moment de la résultante des deux forces sera égal à la somme ou à la différence des moments de ces forces, suivant que le centre des moments sera situé à l'extérieur ou dans l'intérieur de leur direction.

Soient deux forces parallèles P, P′ (*fig.* 17), représentées par les lignes droites mA, $m'A'$; soit R la résultante de ces forces représentée par la droite nB.

Par un point C, pris dans le plan des forces P, P′, R, en dehors de leurs directions, menons une ligne droite perpendiculaire aux directions de ces forces, qui les coupera aux points a, a', b, nous aurons

$$R = P + P'$$
$$Cb = Ca + ab = Ca' - a'b;$$

multiplions chaque terme de la première équation par l'une de ces dernières quantités, ce qui donnera

$$R \times Cb = P \times (Ca + ab) + P' \times (Ca' - a'b)$$
$$= P \times Ca + P \times ab + P' \times Ca' - P' \times a'b;$$

en observant que $P \times ab = P' \times a'b$ (25), et fesant, pour simplifier $Cb = r$, $Ca = p$, $Ca' = p'$, il viendra

$$Rr = Pp + P'p'.$$

C'est-à-dire que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes.

Si le centre C des moments était situé entre les directions des forces P, P′, on démontrerait de la même manière que le moment de la résultante R est égal à la différence des moments des composantes.

§ III. *Composition des forces appliquées à différents points d'un corps solide, et qui agissent dans un même plan, suivant des directions quelconques.*

33. Trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à différents points situés dans un plan, que l'on peut considérer comme la section d'un corps solide.

PREMIÈRE SOLUTION. — *Par la règle du parallélogramme des forces.*

Soient P, P′, P″, P‴, quatre forces (*fig.* 18) appliquées aux points m, m', m'', m''', et représentés par les lignes droites mA, m'A′, m''A″, m'''A‴, situées dans un plan.

Prolongez Am, A′m', jusqu'à leur rencontre au point n, prenez nA $=m$A, nA′ $=m'$A′, et achevez le parallélogramme $naba'$; la diagonale nb de ce parallélogramme représentera la résultante des deux forces P, P′. Prolongez cette diagonale et la direction A″m'' de la force P″ jusqu'à leur rencontre au point n', prenez $n'c=nb$, n'A″ $=m''$A″; complétez le parallélogramme $n'cb'a''$, et menez la diagonale $n'b'$, qui sera la résultante des trois forces P, P′, P″. En composant, par une construction semblable, cette deuxième résultante partielle avec la force P‴, on formera le parallélogramme $n''c'$Ba''', dont la diagonale n''B représente en grandeur et en direction la résultante R des quatre forces P, P′, P″, P‴.

Pour mettre ces forces en équilibre, il faut détruire l'effet de leur résultante, ce qui exige l'action d'une force S, égale et directement opposée à cette résultante.

Le procédé qui vient d'être décrit peut être appliqué pour trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces données, qui agissent dans un plan, et toutes ces forces pourront être remplacées par leur résultante, qui aura toujours la même valeur et la même direction, quel que soit l'ordre que l'on suive pour chercher les résultantes partielles.

Si la résultante de toutes les forces données, moins une, était parallèle, égale à cette dernière force, et dirigée en sens contraire, sans être directement opposée, leur résultante, et par conséquent celle de toutes les forces du système, serait

une force nulle, appliquée à une distance infinie (28); alors la composition de toutes ces forces en une seule résultante ne pourrait s'effectuer, et par conséquent une seule force serait insuffisante pour mettre le système en équilibre.

DEUXIÈME SOLUTION. — *Par le calcul.*

34. Soient P, P′, P″, trois forces (*fig.* 19), appliquées aux points m, m', m'', et représentées par les lignes droites mD, m'D′, m''D″, situées dans un plan; menons dans ce plan, deux axes rectangulaires OX, OY, et décomposons chacune des forces P, P′, P″, en deux forces rectangulaires, l'une parallèle à l'axe OX et l'autre parallèle à l'axe OY.

Si l'on désigne par α, α', α'', les angles BmD, B′m'D′, B″m''D″, formés par les directions des forces avec l'axe OX, et par β, β', β'', les angles DmC, D′m'C′, D″m''C″, formés par les mêmes directions avec l'axe OY, les composantes de la force P seront exprimées par $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$; celles de la force P′ seront exprimées par $P'\cos\alpha'$, $P'\cos\beta'$, etc.; en désignant par L la somme des composantes qui agissent parallèlement à l'axe OX, ou la résultante de toutes ces forces, et par M celle des forces qui agissent parallèlement à l'axe OY, on aura

$$L = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'',$$
$$M = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta''.$$

En prolongeant les directions des composantes parallèles à l'axe des x jusqu'à la rencontre de l'axe des y, on pourra prendre les points où les directions des forces coupent cet axe pour leurs points d'application; le point O étant l'origine, les distances Oy, Oy', Oy'', ou les ordonnées y, y', y'', sont

données; si l'on désigne par Y l'ordonnée inconnue de la résultante L, le théorème des moments donnera

$$LY = yP\cos\alpha + y'P'\cos\alpha' + y''P''\cos\alpha'';$$

en désignant par X la distance de l'origine O au point où la résultante M des forces parallèles à l'axe des y coupe l'axe des x, on aura, d'après le même théorème,

$$MX = xP\cos\beta + x'P'\cos\beta' + x''P''\cos\beta''.$$

Les valeurs des coordonnées X, Y, seront déterminées par ces deux équations.

Soient $X = Of$, $Y = Oe$; par les points e, f, menons deux lignes droites eE, fF, l'une parallèle à l'axe des x, et l'autre parallèle à l'axe des y; ces droites seront les directions des forces L, M, et le point n où elles se coupent pourra être pris pour leur point commun d'application.

La grandeur de la résultante sera déterminée par la formule

$$R = \sqrt{L^2 + M^2}.$$

Il reste encore à déterminer la direction de la résultante.

Soient a, b, les angles que cette direction forme avec les droites nE, nF; en prenant $ne' = L$, $nf' = M$, et achevant le rectangle $ne'rf'$, les triangles rectangles $ne'r$, $nf'r$, donneront

$$R : L :: 1 : \cos a = \frac{L}{R},$$
$$R : M :: 1 : \cos b = \frac{M}{R}.$$

Ces deux équations feront connaître les angles que la di-

rection de la résultante forme avec les droites nE, nF, parallèles aux axes, et par conséquent cette direction sera déterminée.

Nous avons seulement considéré les trois forces P, P', P''; la résultante de ces forces est déterminée en grandeur et en direction par l'analyse précédente : il est facile de voir que la même méthode s'applique à un système composé d'un nombre quelconque de forces, dirigées dans un plan; il suffira d'appliquer les formules que nous avons trouvées, pour calculer la grandeur et la direction de la résultante.

Pour éclaircir la solution générale du problème que nous venons de résoudre, nous en ferons l'application à un exemple numérique.

Prenons le millimètre pour unité linéaire, et supposons que les données du problème soient exprimées par les nombres suivants :

$$\begin{array}{lll} P=26, & P'=22{,}5, & P''=15; \\ \alpha=26^\circ 30', & \alpha'=35^\circ, & \alpha''=124; \\ \beta=63^\circ 30', & \beta'=55^\circ, & \beta''=34^\circ. \end{array}$$

En désignant par L la somme des composantes dirigées parallèlement à l'axe des x, et par M la somme des composantes parallèles à l'axe des y, on a les deux équations

$$\begin{aligned} L &= P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' \\ &= 26\cos 26^\circ 30' + 22{,}5\cos 35^\circ + 15\cos 124^\circ \\ &= 23{,}26 + 18{,}43 - 8{,}39 = 41{,}69 - 8{,}39 = 33{,}30, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' \\ &= 26\cos 63^\circ 30' + 22{,}5\cos 55^\circ + 15\cos 34^\circ \\ &= 11{,}60 + 12{,}90 + 12{,}83 = 37{,}33. \end{aligned}$$

Les coordonnées des composantes parallèles aux axes sont :

$$x = 51,\quad x' = 37{,}5,\quad x'' = 43;$$
$$y = 12,\quad y' = 20,\quad y'' = 40.$$

Désignons par X, Y, les coordonnées des forces L, M, nous aurons, par le théorème des moments,

$$\begin{aligned} \mathrm{LY} &= y\mathrm{P}\cos\alpha + y'\mathrm{P}'\cos\alpha' + y''\mathrm{P}''\cos\alpha'' \\ &= 12 \times 23{,}26 + 20 \times 18{,}43 + 40 \times -8{,}39 = 312{,}12; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{MX} &= x\mathrm{P}\cos\beta + x'\mathrm{P}'\cos\beta' + x''\mathrm{P}''\cos\beta'' \\ &= 51 \times 11{,}6 + 37{,}5 \times 12{,}9 + 43 \times 12{,}83 = 1627{,}04; \end{aligned}$$

$$\mathrm{Y} = \frac{312{,}12}{33{,}30} = 9{,}4;\quad \mathrm{X} = \frac{1627{,}04}{37{,}33} = 43{,}6.$$

La grandeur de la résultante sera déterminée par la formule

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2} = \sqrt{(33{,}3)^2 + (37{,}33)^2} = 49{,}92.$$

En composant les forces données par la règle du parallélogramme des forces, on trouvera la même résultante.

Les lignes droites qui représentent les forces P, P′, P″, dans la *fig.* 19, ont pour mesure les valeurs numériques de l'exemple que nous venons de calculer, mais nous avons supposé des coordonnées plus grandes ; ainsi, en étudiant ce problème, on devra décrire la figure exactement d'après les nombres donnés.

35. L'équation de la ligne droite suivant laquelle la résultante des forces P, P′ P″, est dirigée, peut être déduite de ce qui précède : cette équation est de la forme

$$y = ax + b,$$

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne droite; puisqu'elle passe par le point n dont les coordonnées sont X et Y, l'équation sera satisfaite par ces coordonnées, et l'on aura

$$Y = aX + b;$$

cette équation étant retranchée de celle qui précède, il viendra

$$y - Y = a(x - X);$$

il reste encore à déterminer la tangente a de l'angle EnR que forme la direction de la résultante avec l'axe des x.

Le triangle rectangle $ne'r$ donne la proportion

$$L : M :: 1 : a = \frac{M}{L};$$

en substituant cette valeur de a, l'équation de la résultante deviendra

$$y - Y = \frac{M}{L}(x - X),$$
$$Ly - Mx = LY - MX.$$

Le second membre de cette équation est composé de quantités connues; si l'on prend à volonté la valeur de l'une des coordonnées, par exemple, celle de l'abscisse x, l'équation fera connaître la valeur de l'ordonnée correspondante y; d'ailleurs le point n est connu: ainsi l'on aura deux points de la direction de la résultante, et par conséquent cette direction sera déterminée.

L'équation de la direction de la résultante peut servir à déterminer sa position dans le plan des forces, et les signes de L et M feront connaître dans quel sens elle agit.

Si les forces P, P', P'', etc., situées dans un plan, sont en

équilibre, et s'il n'y a aucun point fixe dans le système, l'une quelconque des forces sera égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres; en effet, si l'on sépare l'une des forces, par exemple la force P, et que l'on cherche la résultante R′ des autres forces P′, P″, etc., le système sera réduit aux deux forces P et R′, qui devront se détruire; donc ces deux forces seront égales et directement opposées.

Lorsqu'il y a un point fixe dans le système, il faut, pour que l'équilibre puisse exister, que la résultante de toutes les forces passe par ce point.

Si l'équilibre n'existe pas, et que les forces données aient une résultante, on établira l'équilibre en ajoutant une force égale et directement opposée à la résultante.

CHAPITRE IV.

DES CENTRES DE GRAVITÉ.

§ I. *Notions générales sur la pesanteur et sur l'action que cette force exerce sur les corps. La pesanteur agit suivant des directions verticales que l'on peut regarder comme parallèles. Définition du centre de gravité.*

36. Dans les propositions que nous avons démontrées jusqu'ici, nous n'avons considéré les corps auxquels les forces sont appliquées que comme des points matériels, ou de simples corps géométriques, en faisant abstraction des propriétés qui leur sont inhérentes, telles que la densité, la masse et le poids; nous allons maintenant appliquer aux corps solides, tels qu'on les emploie dans les constructions mécaniques, les principes que nous avons démontrés: nous présenterons d'abord quelques considérations générales sur les propriétés physiques des corps, qu'il est nécessaire de bien connaître, lorsqu'on veut leur appliquer les règles de l'équilibre déduites de la théorie.

Le mot *pesanteur* désigne la force qui agit sur les corps, en les tirant ou en les poussant vers le centre de la Terre; c'est d'après cette tendance qu'on l'appelle aussi pesanteur terrestre. La pesanteur universelle, ou la gravité, est une force de même nature que la pesanteur terrestre, mais son action s'exerce dans un autre sens, elle tend à tirer toutes les planètes et les comètes vers le centre du Soleil; lorsque nous

exposerons les lois du mouvement, nous ferons connaître celles de la pesanteur universelle, dont la pesanteur terrestre n'est qu'un cas particulier; nous ne nous occuperons ici que de cette dernière force, en nous bornant à ce qui peut être utile dans les applications que nous allons faire pour la détermination des centres de gravité.

Tous les corps sont soumis à l'action de la pesanteur, et cette action est la même pour chacune des particules matérielles, quelles que soient sa petitesse et sa forme; si elle n'est pas soutenue, les impressions de la pesanteur lui feront parcourir dans un temps donné, par exemple, dans une seconde, le même espace que celui qu'elle fera décrire, dans le même temps, à un autre corps, d'une espèce quelconque, et dont le volume peut être pris à volonté. Les phénomènes que nous observons semblent n'être pas conformes à cette loi de la nature; souvent nous voyons deux corps abandonnés du même lieu et au même instant, à l'action de la pesanteur, se séparer, de sorte que l'un parvient avant l'autre au terme de la chute; mais cette différence de vitesse est produite par l'air atmosphérique qui oppose, aux corps qui le traversent, une résistance d'autant plus grande que la masse ou la quantité de matière qu'ils renferment est plus petite.

La pesanteur agit suivant des lignes droites perpendiculaires à la surface de la Terre, et si l'on suppose ces droites prolongées, elles auront leur point de concours vers le centre; toutes ces lignes se rencontreraient au centre de la Terre, si elle était exactement sphérique, et nous pouvons admettre cette supposition sans nous écarter du degré d'exactitude qu'exigent les applications qui vont suivre, parce que la figure de la Terre, qui est celle d'un sphéroïde aplati vers les pôles, diffère peu d'une sphère: les directions de la pesanteur

sont donc des lignes droites obliques entre elles; mais les longueurs que l'on prend sur ces droites, dans les applications de la Statique, étant très petites par rapport à la distance du point où elles se rencontrent, l'obliquité peut être négligée, et l'on peut considérer les directions de la pesanteur qui agit sur un corps, ou sur plusieurs corps qui forment un système, comme des lignes droites parallèles.

Il est facile de se rendre compte de la petite erreur qui résulte de cette supposition : la longueur du quart du méridien est de 10 000 000 mètres; en divisant ce nombre par $90 \times 60 \times 60 = 324000$, on trouve pour quotient $30^{m},86$: c'est la longueur de l'arc d'une seconde, sur la surface de la Terre. Ainsi les directions de la pesanteur, qui agissent aux extrémités d'un corps dont la longueur horizontale est de 30 mètres, forment un angle moindre qu'une seconde : cet angle a son sommet au centre de la Terre, dont le rayon moyen est de 6 366 198 mètres; pour mesurer des quantités aussi petites que cette inclinaison, il faudrait employer des procédés dont on ne fait aucun usage dans les constructions ordinaires.

L'intensité de la pesanteur éprouve des variations qui dépendent de plusieurs causes; cette intensité suit la raison inverse du carré des distances au centre de la Terre, hors de sa surface; dans l'intérieur de la Terre, la pesanteur augmente ou diminue en raison inverse de la simple distance au centre.

La Terre étant aplatie vers les pôles, les points de sa surface s'éloignent de son centre en allant de l'un des pôles vers l'équateur, ce qui produit une diminution dans l'action de la pesanteur; cette diminution est encore augmentée par la rotation de la Terre autour de son axe; la force centrifuge en-

gendrée par ce mouvement, produit, sur la pesanteur, une diminution d'autant plus grande, que le corps sur lequel elle agit est plus près de l'équateur.

Ces diverses causes de variation, dans les effets de la pesanteur, ne produisent pas de changements susceptibles de produire des erreurs sensibles, lorsque les corps sur lesquels cette force agit sont renfermés dans des limites peu étendues, et c'est ce qui arrive dans tous les cas que présentent les applications de la Statique; nous pouvons donc considérer la pesanteur comme une force constante, qui agit sur toutes les particules matérielles d'un corps, suivant des lignes droites parallèles, dont la direction commune est perpendiculaire à la surface de la Terre, ou au plan de l'horizon du lieu où le corps est situé.

Les effets que la pesanteur fait éprouver à toutes les particules matérielles d'un corps, peuvent être considérés comme ceux d'un système de forces parallèles, égales entre elles, qui seraient appliquées à ces mêmes particules matérielles: la résultante de toutes ces forces, qui agit suivant une droite parallèle aux composantes, et qui est égale à leur somme, forme le *poids* du corps. Il ne faut pas confondre le poids avec la pesanteur : celle-ci est la force qui est répartie entre toutes les particules de la masse; le poids est la somme des effets produits par cette force, ou l'effort qu'il faudrait exercer, en sens opposé, pour détruire la résultante de la pesanteur, et maintenir le corps en équilibre.

37. La quantité de matière que renferme le volume d'un corps, ou la somme des particules matérielles qu'il contient, s'appelle la *masse* de ce corps; cette masse est une quantité que l'on emploie souvent dans les calculs; on peut la remplacer par le poids, parce qu'elle lui est proportionnelle.

La *densité* d'un corps est exprimée par le rapport de la masse au volume, ou par le quotient de sa masse divisée par son volume; ainsi, en désignant la masse d'un corps par M, son volume par V et sa densité par D, on aura

$$D = \frac{M}{V}.$$

Si l'on désigne par m, v et d, la masse, le volume et la densité d'un autre corps, on aura pareillement

$$d = \frac{m}{v}.$$

La première équation étant divisée par la seconde, il viendra

$$\frac{D}{d} = \frac{M}{V} \times \frac{v}{m} = \frac{M}{m} \times \frac{v}{V};$$

ce qui fait voir que les densités de deux corps sont en raison composée de la directe de leurs masses et de l'inverse de leurs volumes.

Si les volumes sont égaux, on aura

$$\frac{D}{d} = \frac{M}{m};$$

les densités seront proportionnelles aux masses.

Si les masses sont égales, les densités seront en raison inverse des volumes.

Un corps *homogène* est celui qui a toutes ses parties de même nature et qui est d'une égale densité; ce qui a lieu lorsque la masse de ce corps est également distribuée dans toute l'étendue de son volume.

On appelle corps *hétérogène*, celui qui est un mélange de parties différentes, et dont la densité n'est pas uniforme.

Les corps dont nous allons nous occuper, en les considérant comme soumis à l'action de la pesanteur, seront supposés homogènes; lorsqu'on voudra appliquer les propositions qui auront été démontrées pour les corps homogènes à ceux qui sont hétérogènes, il sera nécessaire de les modifier, afin d'approcher le plus qu'il sera possible du résultat théorique que l'on cherche.

38. L'action de la pesanteur sur un corps étant répartie de manière que chaque particule matérielle reçoit des impulsions égales dans des temps égaux, et qu'elles agissent parallèlement entre elles, suivant la direction verticale qui serait marquée par un fil-à-plomb, attaché à l'un quelconque des points du corps, il en résulte que les effets de la pesanteur peuvent être considérés comme des forces parallèles, et qu'on peut leur appliquer les propositions qui ont été démontrées sur ces forces.

Nous avons trouvé, dans la compositiou des forces parallèles appliquées à un corps, que la résultante de toutes ces forces passe par un point dont la position est invariable; ce point, qui a été nommé *centre des forces parallèles*, existe aussi dans les corps soumis à l'action de la pesanteur : comme on en fait fréquemment usage dans les applications de la Statique, on est convenu de le désigner par un nom particulier, et il a été nommé *centre de gravité*.

Si le centre de gravité d'un corps est fixe, ce corps restera en équilibre dans toutes ses positions autour de ce centre, car la résultaute de la pesanteur qui agit sur un corps, passant toujours par son centre de gravité, elle est détruite par la résistance que ce centre fixe lui fait éprouver.

Le centre de gravité d'un corps solide peut être défini d'après cette propriété, en disant que c'est un point tel, que s'il

est soutenu, le corps restera en équilibre dans toutes les positions qu'on pourra lui faire prendre.

Si un corps solide est retenu par un point fixe, il faut, pour que l'équilibre puisse exister, que la droite menée par ce point et par le centre de gravité soit verticale; le point pouvant être situé au-dessus ou au-dessous du centre de gravité. En effet, le poids du corps peut être considéré comme une force verticale, appliquée à son centre de gravité; pour que cette force puisse être détruite par le point fixe, sa direction doit coïncider avec la droite qui joint ce point et le centre de gravité; donc cette droite doit être verticale.

39. Lorsqu'un corps solide est suspendu à un point fixe C, par un fil CA (*fig.* 20), ce fil est vertical, et si l'on imagine qu'il soit prolongé dans l'intérieur du corps, son prolongement AB passera par le centre de gravité de ce corps. On déduit de là un moyen qui peut être employé pour trouver le centre de gravité d'un corps solide de forme quelconque, sans qu'il soit nécessaire d'avoir égard à sa densité, qui peut être homogène ou hétérogène.

Le corps étant suspendu par le point A, si l'on trace la ligne droite AB, suivant le prolongement du fil de suspension CA, le centre de gravité sera sur la droite AB; en suspendant ce même corps par un autre point A′ de sa surface, et traçant la ligne droite A′B′, suivant le prolongement du fil auquel ce corps est suspendu, son centre de gravité se trouvera sur la droite A′B′; mais il doit aussi se trouver sur la droite AB, donc il sera au point G où ces deux droites se coupent.

Si un corps soumis à la seule action de la pesanteur, est placé sur un plan horizontal fixe, et que la verticale abais-

sée du centre de gravité rencontre le plan dans l'intérieur de la base du corps, l'équilibre aura lieu, parce que le poids du corps, ou la force qui le sollicite, sera détruit par la résistance du plan.

L'équilibre n'existerait pas, si la verticale abaissée du centre de gravité rencontrait le plan hors de la base du corps; l'effet de la pesanteur ne serait pas entièrement détruit, et le corps serait renversé sur le plan, du côté de la verticale.

Il ne suffit pas de mettre un corps en équilibre, lorsqu'il doit rester dans une position fixe; il faut encore le consolider, de manière qu'il puisse résister à toutes les secousses auxquelles il pourra être soumis, et à tous les efforts qu'il devra supporter: c'est ce que doivent prévoir les ingénieurs et les artistes, dans les diverses constructions qu'ils sont chargés de faire exécuter; ils doivent être guidés par la théorie, mais ce guide serait insuffisant, s'il n'était accompagné des moyens que le constructeur doit savoir choisir, ou imaginer, en consultant ceux dont le bon usage a été constaté par l'expérience. Voici un exemple dans lequel il y avait des difficultés qui ont été surmontées par des moyens simples, en réunissant l'économie à la solidité que l'on exige dans les bonnes constructions.

La statue équestre de Louis XIV a été fondue, transportée et élevée sur son piédestal, place des Victoires, par M. Carbonneau, l'un des plus habiles fondeurs en bronze de notre époque; il est parvenu à simplifier cet art difficile, en substituant le moulage en sable aux anciens procédés du moulage en cire, que l'on suit encore aujourd'hui dans la plupart des établissements où l'on s'occupe de la fonte des grandes statues. Celle de Louis XIV a été fondue en plusieurs

morceaux, d'après les nouveaux procédés; son poids est d'environ six milliers, ou 3000 kilogrammes.

Cette statue, dont le cheval se cabre, n'a pas été fondue d'une égale épaisseur dans toutes ses parties; la tête du cheval, le poitrail et les jambes de devant, qui ne pèsent pas plus de 750 kilogrammes, sont beaucoup plus minces que les autres parties; la statue toute montée, restait en équilibre sur les pieds de derrière du cheval, dans la position qu'elle devait avoir sur le piédestal; le moyen qu'a employé M. Carbonneau, pour la fixer solidement dans cette position, consiste dans une armature en bronze, fondue d'un seul jet: cette armature est composée de deux branches parallèles, qui entrent dans les jambes de derrière du cheval, et qui descendent dans la maçonnerie; elles sont assemblées par une traverse horizontale, qui est encastrée dans le piédestal, au-dessous de la corniche, et qui porte, à son milieu, une tige qui descend parallèlement aux deux premières branches. Cette armature, bien ajustée, est suffisante pour donner à la statue une stabilité qui n'est inférieure à celle d'aucun autre monument du même genre.

§ II. *Règles pour déterminer les centres de gravité. Centres de gravité des lignes.*

40. Dans les problèmes qui ont pour objet la recherche des centres de gravité, on considère seulement les corps pour la mesure desquels la Géométrie fournit des règles, et l'on suppose que ces corps sont homogènes, ou d'une densité égale dans toutes leurs parties.

Lorsqu'on connaît les règles que l'on doit suivre pour déterminer les centres de gravité des corps homogènes, de la

forme de ceux qui sont définis dans les Éléments de Géométrie, et qu'il s'agit de les appliquer à d'autres corps de formes irrégulières, tels qu'ils sont employés dans les constructions, on a recours à des transformations analogues à celles qu'il faudrait employer pour les mesurer; on n'obtient pas rigoureusement le résultat théorique par ces méthodes d'approximation, mais il suffit que celui que l'on trouve en approche assez pour que l'on puisse négliger la différence sans qu'il en résulte d'erreur sensible.

Parmi les corps géométriques, il y en a plusieurs dans lesquels on peut trouver les centres de gravité par des constructions très simples, parce qu'il suffit, pour chacun de ces corps, de déterminer le centre de figure avec lequel le centre de gravité coïncide.

Le centre de gravité d'une ligne droite pesante, homogène et de même diamètre dans toute sa longueur, est situé à son milieu.

On peut concevoir cette ligne droite partagée en un nombre pair de petites parties égales, que l'on peut considérer comme des poids égaux, qui seront placés de part et d'autre de son milieu, à des distances égales; le centre commun de gravité de deux poids égaux est situé au milieu de la ligne droite qui joint les centres de gravité de ces deux poids; donc le centre commun de gravité de tous les poids partiels, ou le centre de gravité du poids de la ligne droite entière, est situé au milieu de cette droite.

Donc, le centre de gravité d'une ligne droite donnée peut être regardé comme un point déterminé. On verra, dans les exemples suivants, qu'il est facile d'en faire l'application, pour trouver le centre de gravité du contour d'un triangle et de tout autre polygone, quel que soit le nombre de ses côtés.

41. *Trouver le centre de gravité du contour d'un triangle.* — Soit ABC (*fig.* 21) le triangle donné; partageons les côtés AB, AC, BC, chacun en deux parties égales, et par les points de division E, F, D, menons les droites EF, FD, DE, qui formeront le triangle EFD.

Les masses, ou les poids, des trois côtés AB, AC, BC, du triangle ABC, peuvent être considérés comme trois forces parallèles qui leur sont proportionnelles, et qui agissent dans le même sens; nous désignerons ces forces par les lettres E, F, D, placées à leurs points d'application.

D'après la construction, les côtés du triangle EFD coupent ceux du triangle ABC en parties proportionnelles; d'où il résulte que ces deux triangles ont leurs côtés parallèles, et qu'ils sont semblables.

Divisons l'angle EDF en deux parties égales par la ligne droite Dd; cette droite coupera la base EF en deux segments proportionnels aux côtés FD, DE, et, d'après la propriété des triangles semblables, nous aurons

$$\mathrm{F}d : d\mathrm{E} :: \mathrm{FD} : \mathrm{DE} :: \mathrm{AB} : \mathrm{AC} :: \mathrm{E} : \mathrm{F};$$

ce qui fait voir que le centre de gravité des masses E, F, ou des côtés AB, AC, est au point de division d de la ligne droite EF; le centre de gravité des trois côtés AB + AC et BC, est sur la droite Dd, qui joint le centre de gravité des deux premiers côtés à celui du troisième.

En divisant l'angle DEF en deux parties égales, on aura les rapports

$$\mathrm{F}e : e\mathrm{D} :: \mathrm{FE} : \mathrm{ED} :: \mathrm{BC} : \mathrm{AC},$$

qui expriment que le centre de gravité des côtés BC, AC, est au point e de la ligne droite FD; et par conséquent le centre

de gravité des trois côtés BC + AC et AB, est à l'un des points de la droite E*e*.

Si l'on mène la ligne droite F*f*, qui divise en deux parties égales l'angle EFD, on trouvera de la même manière, que le centre de gravité des trois côtés du triangle ABC, est sur la droite F*f*; puisque ce centre de gravité doit se trouver sur les trois droites qui divisent en deux parties égales chacun des trois angles du triangle DEF, il faut que ces trois droites se coupent en un même point G, qui est le centre de gravité du contour du triangle ABC.

Le point G est aussi le centre du cercle inscrit dans le triangle DEF.

42. *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone donné* ABCDE (*fig.* 22). — Ce problème peut se résoudre, soit par la composition des forces parallèles, soit par le principe des moments.

Première solution. — Partagez chaque côté du polygone en deux parties égales; les centres de gravité des côtés seront aux points de division m, m', m'', m''', m^{iv}; la masse de chaque côté, qui est proportionnelle à sa longueur, peut être supposée réunie à son centre de gravité, ce qui forme un système de forces parallèles; le point d'application de la résultante de ces forces sera le centre de gravité demandé.

Joignez les points m''', m^{iv}, par la ligne droite $m'''m^{\text{iv}}$, partagez cette ligne en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux côtés AE, ED, le point de division n sera le centre de gravité de ces deux côtés; joignez ce point avec le milieu m'' du côté DC, partagez la droite nm'' en deux parties réciproquement proportionnelles aux côtés AE + ED et DC, le point de division n' sera le centre de gravité des trois côtés AE, ED, DC; en menant la droite $n'm'$, et la parta-

geant en deux parties réciproquement proportionnelles aux côtés AE + ED + DC et CB, on déterminera le centre de gravité n'' des quatre côtés AE, ED, DC, CB; enfin le centre de gravité des cinq côtés qui forment le contour, ou le périmètre du polygone, se trouvera au point G, où la droite $n''m$ est partagée en deux parties réciproquement proportionnelles à AE + ED + DC + CB et BA.

On trouvera, par des constructions semblables à celles qui précèdent, le centre de gravité du périmètre d'un polygone d'un nombre quelconque de côtés; si le polygone est composé de n côtés, il faudra faire successivement $n - 1$ opérations.

Deuxième solution. — Menons deux axes rectangulaires OX, OY, dans le plan du polygone ABCDE (*fig.* 22), et partageons chacun de ses côtés en deux parties égales, aux points m, m', m'', m''', m^{iv}.

Désignons par x, y, les coordonnées du point m; x', y', celles du point m'; x'', y'', celles du point m'', etc.

Soient p, p', p'', p''', p^{iv}, les poids des côtés du polygone.

En désignant par X, Y, les coordonnées du centre de gravité du polygone ABCDE, nous aurons, par le principe des moments:

$$X = \frac{px + p'x' + p''x'' + p'''x''' + p^{\text{iv}}x^{\text{iv}}}{p + p' + p'' + p''' + p^{\text{iv}}},$$

$$Y = \frac{py + p'y' + p''y'' + p'''y''' + p^{\text{iv}}y^{\text{iv}}}{p + p' + p'' + p''' + p^{\text{iv}}}.$$

Pour appliquer ces formules au polygone donné, nous diviserons une ligne droite de 3 pouces de longueur en 100 parties égales; les côtés du polygone, et les coordonnées des milieux de ces côtés, étant mesurés sur cette échelle, on aura

$AB=18$, $BC=19,5$, $CD=28,7$, $DE=24$, $EA=18$;
$x=25$, $x'=39$, $x''=32$, $x'''=16$, $x^{\text{iv}}=14$;
$y=13,5$, $y'=24$, $y''=41$, $y'''=38$, $y^{\text{iv}}=19$.

Ces valeurs étant substituées dans les formules générales, en observant que les poids des côtés du polygone peuvent être remplacés par les longueurs de ces côtés, il viendra

$$X=\frac{18\times25+19,5\times39+28,7\times32+24\times16+18\times14}{18+19,5+28,7+24+18}=\frac{2764,9}{108,2}=25,5;$$
$$Y=\frac{18\times13,5+19,5\times24+28,7\times41+24\times38+18\times19}{18+19,5+28,7+24+18}=\frac{3141,7}{108,2}=29.$$

Prenons, à partir de l'origine O des axes, les distances $Oa=25,5$, sur l'axe des abscisses, et $Ob=29$, snr l'axe des ordonnées; par les points a, b, menons deux lignes droites parallèles aux axes: ces droites seront les coordonnées X, Y, du point G où elles se coupent, et ce point d'intersection sera le centre de gravité demandé. Ce centre est le même que celui qu'on a déjà trouvé par les constructions géométriques de la première solution.

43. *Trouver le centre de gravité d'un arc de cercle.* — Soit l'arc de cercle BAC (*fig.* 23), décrit du centre O; menez le rayon OA perpendiculaire à la corde BC, l'extrémité A de ce rayon sera le milieu de l'arc, et le centre de gravité demandé sera sur OA.

Du centre O, menez la ligne droite indéfinie OY, perpendiculaire au rayon OA, et des extrémités B, C, de l'arc BAC, menez BD, CE, perpendiculaires à OY. Concevez que l'arc BA soit divisé en un très grand nombre de petites parties égales entre elles, le milieu de chacun de ces petits arcs pourra être considéré comme son centre de gravité: soit mm' l'une de ces parties, ou l'un de ces arcs partiels, le milieu n

de ce petit arc sera son centre de gravité; menez mc, $m'c'$, nd, perpendiculaires, et mb parallèle à OY, et du centre O menez le rayon On.

En considérant le petit arc mm' comme une ligne droite, les deux triangles mbm', Odn, qui ont les côtés perpendiculaires, seront semblables, et l'on aura la proportion

$$mm' : mb \quad \text{ou} \quad cc' :: On \quad \text{ou} \quad OA : dn.$$

Le même raisonnement s'appliquera à toutes les parties de l'arc; par conséquent, si l'on désigne par OG la distance du centre du cercle au centre de gravité de l'arc, on aura

$$BAC : DE \quad \text{ou} \quad BC :: OA : OG = \frac{OA \times BC}{BAC}.$$

On voit, par cette proportion, que la distance du centre de gravité d'un arc de cercle au centre de ce cercle, est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers termes sont l'arc, la corde de cet arc et le rayon du cercle.

Pour appliquer cette règle générale à un exemple numérique, nous supposerons que le rayon $OA = OB = 27$, et la demi-corde $\frac{1}{2}BC = BF = 21,5$; le triangle rectangle OBF donnera

$$OB : BF :: 1 : \sin \text{arc } AB = \frac{BF}{OB} = \frac{21,5}{27} = 0,7963;$$

en cherchant le nombre 0,7963 dans les tables de sinus, on trouve qu'il correspond à sin 52°47′, et par conséquent

$$\text{l'arc } BAC = 2 \text{ arc } AB = 105°\,34' = 105°,56.$$

Le rayon étant l'unité, la circonférence $\pi = 3,1416$; pour trouver la longueur de l'arc de 105°,56 sur la circonférence

dont le diamètre $=54$, on aura, par la proportion suivante,

$$\left\{\begin{matrix} 1 : 54 \\ 360 : 105{,}56 \end{matrix}\right\} :: 3{,}1416 : x = \frac{3{,}1416 \times 54 \times 105{,}56}{360} = 49{,}74.$$

Les valeurs que nous venons de trouver étant substituées dans la formule générale, il viendra

$$OG = \frac{OA \times BC}{BAC} = \frac{27 \times 43}{49{,}74} = 23{,}34.$$

Si l'arc est égal à la demi-circonférence, la corde sera double du rayon, que nous désignerons par R, et la formule générale deviendra

$$OG = \frac{R \times 2R}{\frac{1}{2}\text{circonf}} = \frac{2R^2}{3{,}1416\,R} = \frac{R}{1{,}5708} = 0{,}6366\,R.$$

Dans un arc plus grand que la demi-circonférence, la corde est moindre que le double du rayon; alors la valeur de OG est plus petite que celle que nous venons de trouver, c'est-à-dire qu'à mesure que l'arc augmente, la distance de son centre de gravité au centre du cercle diminue. Lorsque l'arc est égal à la circonférence entière, la corde est nulle, et la distance $OG = 0$, ce qui exprime que le centre de gravité de la circonférence d'un cercle est au centre de ce cercle.

Centres de gravité des aires.

44. Lorsqu'on cherche le centre de gravité de l'aire d'un polygone, ou d'une autre surface plane déterminée, on fait abstraction de l'épaisseur, et l'on ne considère que les deux autres dimensions, longueur et largeur; si la figure proposée avait une épaisseur assez considérable pour qu'il fût nécessaire d'y avoir égard, alors cette figure serait un solide,

et l'on chercherait son centre de gravité par les méthodes qui seront exposées dans l'article suivant.

Trouver le centre de gravité de l'aire d'un triangle. — Soit le triangle ABC (*fig.* 24) du sommet C de l'un des angles; menons une ligne droite CD au milieu du côté opposé AB, le centre de gravité du triangle sera sur cette droite. En effet, on peut concevoir que le triangle soit divisé, parallèlement à la base AB, en un très grand nombre de petites parties; chacune de ces petites tranches sera coupée en deux parties égales par la ligne droite CD; cette ligne passera donc par les centres de gravité de toutes ces tranches, et par conséquent elle passera par le centre de gravité du triangle.

Si par le sommet de l'angle B, on mène une ligne droite BE, qui rencontre le côté opposé AC en son milieu E, le raisonnement par lequel nous avons prouvé que la droite CD passe par le centre de gravité du triangle, pourra être appliqué à la droite BE, et par conséquent cette dernière ligne passe aussi par ce même centre de gravité.

Donc le centre de gravité du triangle ABC est à l'intersection G des deux lignes droites CD, BE, menées chacune du sommet d'un angle au milieu du côté opposé.

Joignons les deux points E et D par la ligne droite ED; cette ligne sera parallèle à BC, d'après la propriété des lignes proportionnelles, parce qu'elle partage les côtés AB, AC, chacun en deux parties égales; ainsi les triangles BCG, DEG, ont l'angle CBG = GED, l'angle BCG = GDE et les angles en G opposés au sommet; donc ces triangles sont semblables, et en comparant les côtés opposés aux angles égaux, on aura

$$BC : DE :: CG : GD;$$

les triangles semblables ABC, ADE, donnent la propor-

tion

$$BC : DE :: AB : AD.$$

Ces deux proportions ayant un rapport commun, les deux autres rapports donnent

$$CG : GD :: AB : AD :: 2AD : AD :: 2 : 1;$$

d'où l'on tire, par composition,

$$CG : CG + GD \text{ ou } CD :: 2 : 3;$$

donc $CG = \frac{2}{3} CD.$

C'est-à-dire que le centre de gravité d'un triangle est aux deux tiers de la ligne droite menée de l'un de ses angles au milieu du côté opposé, à partir du sommet de cet angle.

Si les centres de gravité de trois masses égales sont appliqués aux trois angles du triangle ABC, le centre commun de gravité des deux masses A et B sera au milieu D de la ligne droite AB qui joint ces masses, et le centre de gravité des trois masses sera sur la droite CD.

En partageant CD en deux parties réciproquement proportionnelles aux masses A + B et C, qui sont entre elles comme 2 : 1, et désignant par x le segment adjacent à la base et par y celui du sommet, on aura

$$2 : 1 :: y : x,$$
$$2 + 1 : 2 :: y + x : y,$$
$$3 : 2 :: CD : y = \frac{2}{3} CD;$$
$$x = \frac{1}{2} y = \frac{1}{3} CD.$$

Le centre de gravité des trois masses égales A, B, C, est au même point G que le centre de gravité de l'aire du triangle.

Trouver le centre de gravité de l'aire d'un trapèze. — Soit ABCD (*fig.* 25) le trapèze proposé; partagez les côtés parallèles AB, DC, chacun en deux parties égales, et joignez les points de division par la droite EF. On peut concevoir la surface du trapèze divisée, par des lignes droites parallèles à AB, en un très grand nombre de petites tranches, qui seront toutes coupées en deux parties égales par la droite EF; par conséquent, le centre de gravité du trapèze est sur cette droite.

Menez la diagonale AC, qui partage le trapèze en deux triangles ADC, ABC, menez les droites AF et CE; prenez sur FA une partie $FM = \frac{1}{3}FA$, et sur EC une partie $EN = \frac{1}{3}EC$, les points M et N seront les centres de gravité des triangles ADC, ABC; joignez ces deux centres par la ligne droite MN, le centre de gravité du trapèze doit se trouver sur cette ligne, mais il doit aussi se trouver sur EF: donc le centre de gravité du trapèze est à l'intersection G des deux lignes droites EF, MN.

Le point G de la ligne droite EF, sur lequel se trouve le centre de gravité du trapèze, peut être déterminé de la manière suivante.

Par le point M menez sur EF la ligne droite ML parallèle à AE; les côtés FA, FE seront coupés en parties proportionnelles par la droite ML, et les triangles FML, FAE, sont semblables; ainsi l'on a

$$FL = \frac{1}{3}FE \quad \text{et} \quad LM = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{6}AB.$$

Si par le point N, on mène NI parallèle à AB ou CD, jusqu'à la rencontre de EF, on aura pareillement

$$EI = \frac{1}{3} EF, \quad NI = \frac{1}{3} CF = \frac{1}{6} CD.$$

Puisque chacune des parties FL et EI, de la ligne droite EF, est égale au tiers de cette ligne, la partie du milieu $IL = IG + GL = \frac{1}{3} EF$.

Les triangles semblables GML, GNI, donnent la proportion

$$LM : IN :: GL : GI,$$

ou

$$AB : CD :: GL : GI;$$

$$AB + CD : CD :: IG + GL \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} EF : IG;$$

d'où l'on tire $\qquad IG = \frac{1}{3} EF \times \frac{CD}{AB + CD};$

en ajoutant $EI = \frac{1}{3} EF$ à cette dernière équation, et observant que $EI + IG = EG$, il viendra

$$EG = \frac{1}{3} EF + \frac{1}{3} EF \times \frac{CD}{AB + CD} = \frac{1}{3} EF \times \frac{AB + 2CD}{AB + CD}.$$

Cherchons maintenant la distance du centre de gravité du trapèze à sa base supérieure, mesurée sur la ligne droite qui joint les milieux des deux bases.

$$FG = EF - EG = EF - \frac{AB \times EF + 2CD \times EF}{3AB + 3CD}$$
$$= \frac{3AB \times EF + 3CD \times EF - AB \times EF - 2CD \times EF}{3AB + 3CD}$$
$$= \frac{2AB \times EF + CD \times EF}{3AB + 3CD}.$$

En divisant l'une par l'autre les valeurs que nous venons de trouver pour les deux parties de la ligne droite EF, il

viendra

$$\frac{EG}{FG}=\frac{AB\times EF+2CD\times EF}{2AB\times EF+CD\times EF}=\frac{AB+2CD}{2AB+CD}.$$

Cette dernière formule renferme un théorème qui peut être énoncé de la manière suivante.

Le centre de gravité du trapèze divise la ligne droite qui joint les milieux des côtés parallèles, ou des bases, en deux parties, qui sont entre elles comme la somme de la base inférieure plus deux fois la base supérieure, est à la somme de deux fois la base inférieure plus la base supérieure.

On peut supposer que les côtés non parallèles AD et BC soient prolongés jusqu'à leur rencontre; alors la base supérieure $DC=0$, le trapèze se change en un triangle, dans lequel la ligne droite FE joint le sommet au milieu de la base, et les formules que nous venons de trouver deviennent

$$EG=\tfrac{1}{3}EF,\quad FG=\tfrac{2}{3}EF.$$

Supposons maintenant que les bases du trapèze deviennent égales, de sorte que $CD=AB$; la figure sera un parallélogramme, et le centre de gravité G divisera la droite EF en deux parties égales. En effet, en mettant AB à la place de CD, dans le second membre de l'équation qui exprime le rapport des deux parties de la droite EF, cette équation se réduit à $\frac{EG}{FG}=1$, et par conséquent $EG=FG$.

Si l'on mène les deux diagonales du parallélogramme, elles se couperont au milieu G de la droite EF, ou au centre de gravité du parallélogramme.

Trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone. — De l'un des angles du polygone donné, on mènera des lignes

droites à tous les autres angles, ce qui partagera le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux; on cherchera ensuite le centre de gravité de chacun de ces triangles. La masse de chaque triangle peut être supposée réunie à son centre de gravité; ainsi l'on aura un système de points matériels dont les masses, ou les poids, pourront être remplacés par les surfaces des triangles, et leur centre commun de gravité, que l'on cherchera soit par le principe des forces parallèles, soit par le théorème des moments, sera le centre de gravité de la somme des triangles, ou de l'aire du polygone.

Si le polygone donné est un polygone régulier, son centre de gravité sera au centre du cercle inscrit ou du cercle circonscrit à ce polygone.

45. *Trouver le centre de gravité d'un secteur de cercle.* — Soit le secteur du cercle OBAC (*fig.* 26); imaginons que l'arc BAC soit partagé en un très grand nombre de petits arcs égaux entre eux. En menant, par le centre O du cercle, des rayons à tous les points de division, le secteur OBAC sera partagé en un très grand nombre de petits secteurs égaux, que l'on pourra considérer comme des triangles; chacun de ces triangles aura son centre de gravité à une distance du centre O égale aux deux tiers du rayon OA: donc si du centre O, avec le rayon $Oa = \frac{2}{3}OA$, on décrit un arc de cercle *bac*, cet arc sera le lieu des centres de gravité de tous les triangles, ou de tous les secteurs partiels: on peut considérer chaque secteur comme ayant son poids concentré à son centre de gravité, et puisque tous ces secteurs sont égaux entre eux, leur centre commun de gravité, ou le centre de gravité du secteur OABC, est le même que le centre de gra-

vité de l'arc *bac*. La distance OG du centre du cercle au centre de gravité de cet arc, est exprimée par la formule

$$OG = \frac{Oa \times bc}{\text{arc } bac},$$

qui renferme la proportion suivante

$$\text{arc } bac : Oa :: bc : OG,$$

dans laquelle les trois premiers termes peuvent être remplacés par d'autres termes équivalents, pris dans le secteur donné, car on a $Oa = \frac{2}{3}OA$, et les triangles semblables OBC, Obc, donnent la proportion

$$OA : \tfrac{2}{3}OA :: BC : bc = \tfrac{2}{3}BC;$$

d'où il suit que l'arc $bac = \frac{2}{3}$ arc BAC.

Ces valeurs étant substituées dans la formule du centre de gravité de l'arc *bac*, qui est aussi celle du centre de gravité du secteur OBAC, cette formule deviendra

$$OG = \frac{\frac{2}{3}OA \times \frac{2}{3}BC}{\frac{2}{3}\text{arc BAC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{OA \times BC}{\text{arc BAC}}.$$

Le centre de gravité d'un secteur de cercle est sur le rayon qui partage ce secteur en deux parties égales, et le résultat que nous venons d'obtenir fait voir qu'en multipliant le rayon par la corde, divisant le produit par l'arc, et prenant les deux tiers du quotient, on aura la distance du centre du cercle au centre de gravité du secteur.

Exemple. Soient le rayon $OA = 36$, et la demi-corde $BF = \frac{1}{2}BC = 22$; le triangle rectangle OFB donnera

$$36 : 22 :: 1 : \sin \text{arc AB} = \frac{22}{36} = 0{,}6111 = \sin 37^\circ 40',$$
$$\text{arc BAC} = 2 \text{arc AB} = 75^\circ 20'.$$

La circonférence $= 2\pi R = 2 \times \frac{22}{7} \times 36,$

et l'arc de $75^\circ 20'$ $= \frac{75\frac{1}{3}}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 36 = 47{,}3.$

Ces valeurs étant substituées dans la formule, on aura

$$OG = \frac{2 \times 36 \times 44}{3 \times 47{,}3} = 22{,}3.$$

Trouver la distance du centre O *d'un cercle donné au centre de gravité du segment* BAC (*fig.* 26). — Ayant mené le rayon OA, qui coupe la base BC, du triangle OBC, en deux parties égales au point F, la distance OG′ du centre du cercle au centre de gravité du triangle sera égale à $\frac{2}{3}$ OF.

Le moment du secteur OABC est égal à la somme des moments du triangle OBC et du segment BAC; ainsi, en désignant par X la distance du centre O du cercle au centre de gravité du segment, on aura

$$X . \text{surf. BAC} + \tfrac{2}{3} OF \times OBC = \tfrac{2}{3} . \frac{OA \times BC}{\text{arc BAC}} \times \text{surf. OBAC};$$

en transposant, et observant que la surface du triangle OBC $= \frac{1}{2} OF \times BC$, et celle du secteur OBAC $= \frac{1}{2} OA \times \text{arc BAC}$, il viendra

$$X . \text{surf. BAC} = \tfrac{2}{3} . \frac{OA \times BC}{\text{arc BAC}} \times \tfrac{1}{2} OA \times \text{arc BAC} - \tfrac{2}{3} OF \times \tfrac{1}{2} OF \times BC$$
$$= \tfrac{1}{3} \overline{OA}^2 \times BC - \tfrac{1}{3} \overline{OF}^2 \times BC.$$

Le triangle rectangle OFB donne

$$\overline{OF}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{OA}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{BC}^2;$$

cette dernière valeur étant substituée à la place de $\overline{OF}^2$, l'équation

$$\begin{aligned} X.\ \text{surf. BAC} &= \tfrac{1}{3}\,\overline{OA}^2 \times BC - \tfrac{1}{3}\left(\overline{OA}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{BC}^2\right) \times BC \\ &= \tfrac{1}{3}\,\overline{OA}^2 \times BC - \tfrac{1}{3}\,\overline{OA}^2 \times BC + \tfrac{1}{12}\,\overline{BC}^3; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{\overline{BC}^3}{12\,\text{surf. BAC}}.$$

Ce qui fait voir que la distance du centre du cercle au centre de gravité d'un segment, est égale au quotient du cube de la corde de ce segment divisé par douze fois sa surface.

Exemple. Reprenons les nombres donnés dans le problème précédent :

$$OA = 36,\ \ BC = 44,\ \ \text{arc BAC} = 75°\,20' = 47{,}3.$$

D'après la propriété du triangle rectangle, on a

$$OF = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{BF}^2} = \sqrt{\overline{36}^2 - \overline{22}^2} = 28{,}5;$$

$$\text{sect. OABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{arc BAC} \times OA = \tfrac{1}{2} \times 47{,}3 \times 36 = 851{,}4;$$

$$OBC = \tfrac{1}{2}.\ OF \times BC = 28{,}5 \times 22 = \ldots\ldots\ 627{,}0;$$

$$\text{Segment BAC} = 224{,}4.$$

Ces valeurs étant substituées dans la formule générale, on

aura

$$X = \frac{\overline{44}^3}{12 \times 224,4} = \frac{85184}{2692,8} = 31,6.$$

Le rayon OA étant divisé en 36 parties égales, si l'on porte 31,6 parties sur ce même rayon, à partir du centre O, on aura la distance OG'' du centre du cercle au centre de gravité du segment BAC.

Si le segment est un demi-cercle, dont la surface $= \frac{1}{2}\pi \times \overline{OA}^2$, la corde, ou la ligne droite qui joint les deux extrémités de l'arc, sera le diamètre $= 2OA$, et la formule deviendra

$$X = \frac{(2OA)^3}{12 \times \frac{1}{2}\pi \times \overline{OA}^2} = \frac{8\overline{OA}^3}{6\pi . \overline{OA}^2} = \frac{4OA}{3\pi}.$$

La distance du centre du cercle au centre de gravité du demi-cercle, est égale au quotient de quatre fois le rayon divisé par trois fois le rapport de la circonférence au diamètre.

La circonférence dont le diamètre est l'unité, ou la valeur de $\pi = 3,1416$; en prenant le rayon $OA = 36$, comme dans le dernier exemple, on aura

$$X = \frac{4 \times 36}{3 \times 3,1416} = 15,28.$$

Centres de gravité des solides.

46. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.* — Soit la pyramide triangulaire SABC (*fig.* 27); cherchons le centre de gravité E de sa base ABC, et joignons le sommet S et le point E par la ligne droite SE; cette ligne passera par le centre de gravité de la pyramide, car si l'on con-

çoit que cette pyramide soit formée d'un nombre infini de tranches triangulaires, parallèles à sa base, tous ces triangles seront semblables entre eux, et la ligne droite SE qui rencontre la base ABC à son centre de gravité E, passera par le centre de gravité de toute autre section : en effet, soit *abc* une section parallèle à la base ABC, et *cd* une ligne droite menée de l'angle *c* au milieu du côté opposé *ab*; les deux droites CD, *cd*, sont parallèles, et la droite SE les coupe en parties proportionnelles; mais puisque le point E est le centre de gravité du triangle ABC, on a $CE = \frac{2}{3} CD$, par conséquent on a aussi $ce = \frac{2}{3} cd$, et le point *e* est le centre de gravité du triangle *abc*; donc la droite SE passe par le centre de gravité de la pyramide.

On démontrerait par un raisonnement semblable, que la ligne droite CF, menée du sommet C au centre de gravité F de la face opposée SAB, passe par le centre de gravité de la pyramide SABC; donc le centre de gravité de cette pyramide est à l'intersection G des deux droites SE, CF. Cherchons à déterminer sa position par rapport au sommet S.

Nous venons de prouver que les deux lignes droites SE, CF, se coupent, parce qu'elles passent toutes les deux par le centre de gravité de la pyramide; mais on peut aussi observer que ces deux lignes doivent se couper, parce qu'elles sont dans un même plan, qui est le plan SDC.

Si l'on joint les points E et F, par la ligne droite EF, cette ligne sera parallèle à SC. En effet, la droite EF coupe les côtés CD, DS, du triangle CDS, en parties proportionnelles, puisqu'on a $DE = \frac{1}{3} DC$ et $DF = \frac{1}{3} DS$; par con-

séquent les triangles DEF, DCS, sont semblables, ainsi que les triangles EGF, CGS, et l'on a

$$SC : FE :: SD : FD :: 3 : 1,$$
$$SC : FE :: SG : GE.$$

Ces deux proportions ayant un rapport commun, les deux autres rapports donneront

$$SG : GE :: 3 : 1,$$
$$SG + GE \text{ ou } SE : GE :: 4 : 1,$$
$$GE = \tfrac{1}{4} SE.$$

C'est-à-dire que le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la ligne droite qui joint le sommet de la pyramide et le centre de gravité de sa base, aux trois quarts de cette ligne, à partir du sommet.

Trouver le centre de gravité d'une pyramide dont la base est un polygone d'un nombre quelconque de côtés. — Soit la pyramide polygonale SABCDE (*fig.* 28) de l'un des angles A de la base ABCDE; menons les diagonales AC, AD, qui partageront cette base en trois triangles ABC, ACD, ADE, et cherchons les centres de gravité f, f', f'' de ces triangles; considérons les surfaces des triangles partiels comme des forces parallèles appliquées à leurs centres de gravité, et cherchons le centre F de ces forces, qui sera le centre de gravité de la base ABCDE; joignons ces centres de gravité et le sommet S de la pyramide par les lignes droites Sf, Sf', Sf'' et SF.

La pyramide polygonale est partagée en trois pyramides triangulaires SABC, SACD, SADE; chacune de ces pyramides a son centre de gravité sur la ligne droite qui joint le

centre de gravité de sa base et leur sommet commun S, aux trois quarts de cette ligne, à partir du sommet.

Une section faite dans une pyramide, par un plan parallèle à sa base, coupe toutes les droites menées du sommet à cette base, en parties proportionnelles; par conséquent, si par le centre de gravité g de la pyramide partielle SABC on mène le plan *abcde*, parallèle à la base ABCDE, les centres de gravité g, g', g'' des trois pyramides partielles, et le centre de gravité G de la pyramide entière, seront dans le plan de la section; car ce plan coupera les droites Sf, Sf', Sf'', chacune aux trois quarts de sa longueur, à partir du sommet; donc il passera par les centres de gravité des pyramides partielles; d'où il résulte que le centre de gravité de la pyramide entière est aussi dans ce plan.

Le centre de gravité de la pyramide SABCDE est sur la ligne droite SF, qui joint son sommet S et le centre de gravité F de sa base: pour le prouver, imaginons que la pyramide soit composée d'un nombre infini de tranches parallèles à sa base; puisque la ligne droite SF rencontre la base de la pyramide à son centre de gravité, cette ligne coupera toutes les sections en des points semblablement placés, et ces points seront les centres de gravité des sections ou des tranches de la pyramide; ainsi le centre de gravité de cette pyramide sera sur la ligne droite SF, et puisqu'il doit aussi se trouver dans le plan *abcde*, il sera à l'intersection G de ce plan et de la droite SF.

Donc le centre de gravité d'une pyramide quelconque est sur la ligne droite qui joint le sommet de cette pyramide et le centre de gravité de sa base, aux trois quarts de cette ligne, à partir du sommet, ou au quart, à partir de la base.

Pour trouver le centre de gravité d'un polyèdre quel-

conque, on le décomposera d'abord en pyramides, et l'on cherchera le centre de gravité de chacune de ces pyramides partielles; le polyèdre étant décomposé en plusieurs parties dont les centres de gravité seront déterminés, on cherchera ensuite, par les méthodes que nous avons expliquées, le centre commun de toutes ces parties, ou de toutes ces pyramides, qui sera le centre de gravité du polyèdre entier.

Si le solide dont il s'agit de trouver le centre de gravité est un parallélépipède, ou un prisme à bases parallèles, il ne sera pas nécessaire de le décomposer en pyramides; il suffira de joindre les centres de gravité des deux bases parallèles par une ligne droite, et le centre de gravité du solide sera au milieu de cette droite.

Le centre de gravité d'un cône est sur la ligne droite qui joint son sommet et le centre de gravité de sa base, au quart de cette droite à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet; car un cône peut être considéré comme une pyramide dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés.

47. *Trouver le centre de gravité d'un tronc de cône.* — — Soit le tronc de cône BDEC (*fig.* 29), dont il s'agit de trouver le centre de gravité; si l'on achève le cône dont ce tronc est la partie inférieure, on aura le cône entier ABC, le cône partiel ADE et le tronc de cône BDEC, qui auront leurs centres de gravité sur l'axe AI. Les centres de gravité H, h, des deux premiers solides sont déterminés; soit G celui du troisième.

En supposant que la masse de chaque solide soit réunie à son centre de gravité, le tronc de cône BDEC, et le cône partiel ADE, pourront être considérés comme deux forces parallèles, appliquées aux points G et h; le cône ABC est la

résultante de ces deux forces, et son point d'application H partage la droite Gh en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux composantes; ainsi l'on a la proportion

$$\text{BDEC} : \text{ADE} :: h\text{H} : \text{HG}.$$

Pour simplifier les calculs, nous ferons

$$\text{BC} = a,\ \ \text{DE} = b,\ \ \text{KI} = c;$$

les triangles semblables ABI, ADK, donnent

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b :: \text{AI} : \text{AK},$$

d'où l'on tire

$$a - b : b :: \text{AI}-\text{AK} \text{ ou } c : \text{AK} = \frac{bc}{a-b},$$

$$\text{AI} = c + \text{AK} = c + \frac{bc}{a-b} = \frac{ac}{a-b},$$

$$\text{AH} = \frac{3}{4}\text{AI} = \frac{3ac}{4(a-b)},$$

$$\text{A}h = \frac{3}{4}\text{AK} = \frac{3bc}{4(a-b)},$$

$$h\text{H} = \text{AH} - \text{A}h = \frac{3ac - 3bc}{4(a-b)} = \frac{3}{4}c,$$

$$\text{le tronc de cône BDEC} = \frac{c\pi}{3} \times \frac{a^2 + b^2 + ab}{4} = \frac{c\pi(a^3 - b^3)}{12(a-b)},$$

$$\text{le cône ADE} = \frac{b^2\pi \times \text{AK}}{4\times 3} = \frac{b^3 c\pi}{12(a-b)};$$

ces valeurs étant substituées dans la proportion, il viendra

$$\frac{c\pi(a^3 - b^3)}{12(a-b)} : \frac{b^3 c\pi}{12(a-b)} :: \frac{3c}{4} : \text{HG} = \frac{3b^3 c}{4(a^3 - b^3)};$$

de cette dernière quantité, combinée avec celle qui déter-

mine le centre de gravité du cône, on déduit

$$\mathrm{IG} = \mathrm{IH} - \mathrm{HG} = \frac{1}{4}\mathrm{AI} - \mathrm{HG} = \frac{ac}{4(a-b)} - \frac{3b^3c}{4(a^3-b^3)}$$
$$= \frac{c}{4}\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b^3}{a^3-b^3}\right).$$

En réduisant au même dénominateur, et divisant ensuite par $a - b$, on aura

$$\mathrm{IG} = \frac{c}{4} \cdot \frac{a^2+2ab+3b^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Cette formule exprime la distance du centre de gravité du tronc de cône à sa base inférieure.

Si l'on fait $a = b$, la formule devient

$$\mathrm{IG} = \frac{c}{4} \times \frac{6a^2}{3a^2} = \frac{1}{2}c;$$

les deux bases étant égales, le solide est un cylindre, et le centre de gravité est au milieu de son axe.

48. *Trouver le centre de gravité d'une zone sphérique.* — Soit la zone DAE (*fig.* 30), décrite par la révolution de l'arc DA autour du rayon AC; supposons que cette zone soit coupée par des plans mn, $m'n'$, $m''n''$, etc., menés à égale distance, perpendiculairement à la flèche AB; toutes les zones partielles $mm'n'n$, $m'm''n''n'$, etc., seront égales entre elles, car la surface de chaque zone est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle. Chacune de ces zones a son centre de gravité sur la flèche AB; donc, si l'on suppose que la masse de chaque zone soit concentrée à son centre de gravité, la ligne droite AB sera chargée de poids égaux, placés à égales distances; par conséquent le centre commun de gravité de tous ces poids, ou le centre de gravité

de la zone DAE, est au milieu G de la flèche AB qui mesure la hauteur de cette zone.

Le centre de gravité d'une zone sphérique à deux bases est au milieu de la ligne droite qui joint les centres de gravité de ses deux bases parallèles.

Ce résultat est une conséquence du rapport des surfaces de la sphère et du cylindre circonscrit; on démontre, dans la Géométrie, que si l'on coupe ces deux corps par des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre, la surface cylindrique, comprise entre deux de ces plans, est égale à la zone sphérique correspondante; le centre de gravité de la première surface est au milieu de la partie de l'axe interceptée par les deux plans parallèles, d'où l'on peut conclure que ce même point est aussi le centre de gravité de la zone inscrite.

49. *Trouver le centre de gravité d'un secteur sphérique.* — Soit le secteur sphérique décrit par la révolution du secteur circulaire CDA, autour du rayon CA (*fig.* 31); on peut imaginer que ce secteur est composé d'un nombre infini de petites pyramides égales, dont tous les sommets sont au centre C de la sphère, et que les bases de toutes ces pyramides forment la zone DAE, qui est la base du secteur sphérique.

Le centre de gravité de chaque pyramide partielle est aux trois quarts de la ligne droite menée du sommet au centre de gravité de sa base: donc si l'on conçoit un secteur sphérique concentrique C*dae*, dont le rayon $Ca = \frac{3}{4}CA$, les centres de gravité de toutes les pyramides partielles seront sur la zone *dae*, et ces centres de gravité peuvent être considérés comme des points où les masses des pyramides partielles sont concentrées; par conséquent le centre commun de gravité de

toutes ces pyramides, ou le centre de gravité du secteur sphérique, sera au même point que le centre de gravité de la zone *dae*; mais le centre de gravité de cette zone est au milieu G de la flèche *fa*, donc le point G est le centre de gravité du secteur sphérique décrit par le secteur circulaire CDA.

Pour déterminer par le calcul le centre de gravité G du secteur sphérique décrit par un secteur circulaire quelconque CDA, nous chercherons une formule qui exprime la valeur de la distance AG, prise sur l'axe de rotation, à partir de la base.

Les secteurs circulaires CDAE, C*dae*, étant semblables, ainsi que les triangles rectangles CFD, C*fd*, on aura

$$CD : Cd :: CA : Ca :: CF : Cf,$$

d'où l'on tire

$$CA : Ca :: CA - CF : Ca - Cf :: AF : af;$$

puisque $\quad Ca = \frac{3}{4}CA,\;$ on a $\;Cf = \frac{3}{4}CF,\; af = \frac{3}{4}AF,$

et par conséquent $\quad aG = \frac{1}{2}af = \frac{3}{8}AF;$

donc $\qquad Aa = AC - aC = \frac{1}{4}AC:$

ces réductions donnent

$$AG = Aa + aG = \frac{1}{4}AC + \frac{3}{8}AF = \frac{1}{8}(2AC + 3AF).$$

Il est facile de déduire de cette formule la distance du centre de la sphère au centre de gravité du secteur sphérique; en effet, cette distance $CG = CA - AG$; en substi-

tuant la valeur de AG, et effectuant les réductions, il viendra

$$CG = \frac{3}{8}(2AC - AF).$$

Lorsque le secteur circulaire est un quart de cercle, le solide engendré par sa révolution autour du rayon CA est une demi-sphère; alors AF = AC, et la formule précédente devient

$$CG = \frac{3}{8}AC.$$

C'est-à-dire que la distance du centre de la sphère au centre de gravité de la demi-sphère est égale aux trois huitièmes du rayon.

50. Toutes les questions dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent sont fondées sur des propositions de Géométrie élémentaire, quelques formules de Trigonométrie, et les premières règles du Calcul algébrique; nous continuerons à nous servir des démonstrations géométriques, lorsqu'elles seront simples et directes comme les précédentes; mais nous emploierons aussi les premiers éléments du Calcul différentiel et du Calcul intégral, que l'on nomme Analyse infinitésimale. Nous allons d'abord en faire l'application à des problèmes que nous avons déjà résolus sur les centres de gravité, et à plusieurs autres propositions qui en dépendent; mais en y appliquant les méthodes dont nous avons fait usage, on parviendrait difficilement à les démontrer.

En composant un nombre quelconque de forces parallèles P, P′, P″, etc., on parvient successivement à trouver leur résultante R, et son point d'application, que l'on nomme *centre des forces parallèles;* cette méthode graphique peut être avantageusement remplacée par le calcul. Les forces pa-

rallèles étant rapportées à trois plans rectangulaires (*fig.* 14ᵃ), l'application du théorème des moments fournit les équations que nous avons trouvées (30), pour calculer les coordonnées du centre de ces forces.

Les forces parallèles que nous considérons ici sont produites par la gravité, ou la pesanteur, et leur centre se nomme centre de gravité du corps, ou du système, sur lequel ces forces agissent.

Soient P le poids d'un corps, et p, p', p'', etc., les poids de ses diverses parties; les centres de gravité étant rapportés aux plans de trois axes rectangulaires AX, AY, AZ; si l'on désigne par X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité du corps entier, que celles du centre de gravité dont le poids est p soient x, y, z; celles du centre de gravité de la partie dont le poids est p', x', y', z', etc.; d'après ce qui a été expliqué précédemment, il est facile de concevoir qu'on aura les équations suivantes:

$$\begin{aligned} P &= p + p' + p'' + \text{etc.}, \\ PX &= px + p'x' + p''x'' + \text{etc.}, \\ PY &= py + p'y' + p''y'' + \text{etc.}, \\ PZ &= pz + p'z' + p''z'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Le corps dont il s'agit de déterminer le centre de gravité, ainsi que ses diverses parties, et les coordonnées de leurs centres de gravité, sont des quantités données, et les seules inconnues sont les coordonnées du centre de gravité du corps entier, que l'on peut calculer par les équations précédentes.

Dans les cas ordinaires, qui comprennent seulement les lignes, les plans et les solides que l'on sait mesurer par des propriétés que la géométrie fait connaître, on dispose les fi-

gures de manière que le centre de gravité que l'on cherche soit sur une ligne droite, et l'on prend cette droite pour l'axe des abscisses; alors on a $Y = 0$ et $Z = 0$; il ne reste que la seule inconnue X, et les deux premières équations suffisent pour calculer sa valeur.

Le poids du corps entier étant représenté par P, sa masse par M, et la gravité, ou la mesnre de la pesantenr, par g, on a l'équation $P = Mg$; en désignant par m, m', m'', etc., les masses des parties du corps dont les poids sont représentés par p, p', p'', etc., on aura une équation semblable pour chacune de ces parties; si l'on substitue l'expression de la masse à la place de celle du poids, en négligeant la pesanteur g qui serait facteur commun dans tous les termes, on aura

$$M = m + m' + m'' + \text{etc.},$$
$$MX = mx + m'x' + m''x'' + \text{etc.}$$

Ces équations auront encore lieu si l'on remplace les masses du corps entier et de ses parties par leurs volumes, parce que dans les corps homogènes, les volumes sont proportionnels aux masses; ainsi, en désignant par V le volume du corps entier dont la masse est représentée par M, et par v, v', v'', etc., les volumes dont les masses sont m', m', m'', etc., les équations précédentes deviennent

$$V = v + v' + v'' + \text{etc.},$$
$$VX = vx + v'x' + v''x'' + \text{etc.}$$

On trouvera, par le moyen de ces dernières équations, la position du point que l'on nomme centre de gravité d'un corps géométrique, quoique dans les corps considérés géométriquement, on ne s'occnpe que du volume apparent, qui

ne renferme point de masse; d'ailleurs on a déjà vu, par les équations qui renferment les masses, que le centre de gravité est indépendant de la pesanteur.

51. Pour passer de l'analyse finie à l'analyse infinitésimale, on considère les seconds membres des équations précédentes comme composés d'un nombre infini de termes infiniment petits, que l'on peut regarder comme égaux entre eux; leur somme, ou l'intégrale, que l'on indique par la caractéristique $\int$, a pour expression l'un de ces termes répété autant de fois qu'il y a de termes, c'est-à-dire un nombre de fois infiniment grand; on détermine ensuite, par les règles du Calcul intégral, l'expression algébrique de la valeur de cette somme.

Si la figure dont il s'agit de chercher le centre de gravité est une ligne, en la désignant par s, sa différentielle, ou l'un de ses éléments infiniment petit, sera exprimée par ds; en représentant par L la longueur de cette ligne, et remplaçant les volumes par les valeurs linéaires que nous venons de désigner, les équations précédentes deviennent

$$L = \int ds, \quad LX = \int x ds, \quad X = \frac{\int x ds}{\int ds}.$$

La première est l'expression de la longueur de la ligne qui est égale à la somme de tous ses éléments; la deuxième est l'équation des moments: elle fait voir que le moment de la ligne entière, par rapport au plan des y, z, est égal à la somme des moments de tous les éléments de cette ligne par rapport au même plan; la troisième équation, qui se déduit des deux premières, est l'expression de la valeur de X, ou de l'abscisse du centre de gravité.

52. *Trouver le centre de gravité d'une ligne droite.* —

Soit la ligne droite AM (*fig.* 32), qui passe par l'origine A des axes rectangulaires AX, AY; désignons par x et y les coordonnées AP, PM, du point M pris sur cette droite, puisqu'elle passe par l'origine, elle a pour équation $y = ax$. Menons l'ordonnée *mp*, infiniment près de MP, et M*r* parallèle à l'axe AX; M*m* sera l'élément que nous avons désigné par *ds*, et l'on pourra prendre x et y pour les coordonnées de son centre de gravité g, parce qu'elles n'en diffèrent que de quantités infiniment petites.

Le triangle rectangle élémentaire M*rm* donne

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

en substituant cette valeur à la place de *ds*, on aura

$$X = \frac{\int x\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

L'équation de la ligne droite étant différentiée, on élimine dy^2, et l'on trouve

$$dy = adx, \quad dy^2 = a^2 dx^2,$$

$$X = \frac{\int x\sqrt{dx^2 + a^2dx^2}}{\int \sqrt{dx^2 + a^2dx^2}} = \frac{\int xdx}{\int dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x.$$

La ligne droite donnée ayant l'une de ses extrémités à l'origine A des coordonnées, et l'autre extrémité correspondant à une abscisse quelconque x, l'abscisse $\frac{1}{2}x$ de son centre de gravité correspond au milieu de sa longueur, ce qui est d'ailleurs évident; cependant il n'était pas inutile de montrer la manière d'y appliquer le calcul, parce que la même méthode servira pour les lignes courbes, comme on le verra dans l'exemple suivant.

53. *Trouver le centre de gravité d'un arc de cercle.* — Soit l'arc de cercle EBF (*fig.* 32), qui a son centre C à l'origine des axes CX, CY, et qui est coupé en deux parties égales au point B, par l'axe des abscisses.

Désignons par x et y les coordonnées CQ, QE, de l'une des extrémités E du demi-arc BE, que nous représenterons par s; soit $Ee = ds$ la différentielle de cet arc, ou l'un des côtés infiniment petit de la portion de polygone que l'on peut prendre pour l'arc de cercle EBF; par les points E et e, menons, parallèlement aux axes, les droites EH, ek, qui se coupent au point h; le triangle rectangle élémentaire Ehe donne

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad s = \int \sqrt{dx^2 = dy^2}.$$

Soit X l'abscisse du centre de gravité de l'arc s; en prenant les moments par rapport à l'axe des y, on aura

$$sX = \int x \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

c'est l'équation différentielle du problème. Pour effectuer l'intégration indiquée, il faut d'abord faire disparaître l'une des variables.

Le cercle ayant son centre C à l'origine des coordonnées, en faisant son rayon $CE = a$, on aura

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 = a^2 - x^2;$$

et en différentiant cette équation

$$ydy = -xdx, \quad dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{y^2} = \frac{x^2 dx^2}{a^2 - x^2}.$$

Cette valeur étant substituée à la place de dy^2, l'équation

différentielle devient

$$sX = \int x\sqrt{\frac{a^2 dx^2}{a^2 - x^2}} = a\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\int xdx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En considérant la quantité entre parenthèses comme une seule variable, et intégrant d'après la règle fondamentale, on aura

$$sX = \frac{axdx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}d\,(a^2 - x^2)} = \frac{axdx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{-xdx} = a\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Cette intégrale, qui renferme un radical du second degré, pourrait être affectée du double signe $\pm$; d'après la disposition de la figure, elle doit être prise avec le signe positif, parce que l'arc dont il s'agit de trouver le centre de gravité est situé du côté des abscisses positives.

En substituant l'ordonnée, ou la demi-corde, à la place du radical, et divisant par l'arc s, on aura

$$X = \frac{ay}{s},$$

pour l'expression de la distance du centre du cercle au centre de gravité d'un arc pris sur sa circonférence; c'est la même formule que celle que nous avons déjà trouvée (43), par une autre méthode.

Appliquons cette formule à un exemple numérique: nous supposerons le rayon divisé en 12 parties égales, ou 12 unités, et nous diviserons l'unité en 10 parties égales; la longueur de la demi-corde EQ, ou l'ordonnée $y = 7{,}7$.

Le sinus de l'arc s, ou le sinus de l'arc semblable dont le rayon est l'unité, est déterminé par la proportion suivante:

$$a : 1 :: y : \sin\frac{s}{a} = \frac{y}{a} = \frac{7{,}7}{12} = 0{,}6416666;$$

en cherchant ce sinus dans les tables de sinus naturels, on trouve qu'il ne diffère qu'à la sixième décimale de celui qui correspond à l'arc de 39° 55′, ce qui donne $s = 39° 55'$.

La demi-circonférence, ou $180° = \pi a = 3,1416 \times 12 = 37,7$,

$$180° : 39°55' :: 37,7 : s = 8,36.$$

Les nombres que nous venons de trouver étant substitués dans la formule générale, on aura

$$X = \frac{ay}{s} = \frac{12 \times 7,7}{8,36} = 11,05.$$

Cette valeur de X est l'abscisse du centre de gravité de l'arc EB; les arcs BE et BF, étant chacun la moitié de l'arc EBF, on en pourrait conclure que le centre de gravité de ce dernier arc est à l'extrémité G de l'abscisse que nous venons de calculer: c'est ce qu'il est facile de vérifier.

Menons la corde BE, et le rayon qui coupe cette corde et l'arc soutendu chacun en deux parties égales; en faisant $\frac{1}{2}$ BE $= y' = 4,1$; $\frac{1}{2}$ arc BE $= s' = 4,18$, la formule générale devient

$$X' = \frac{ay'}{s'} = \frac{12 \times 4,1}{4,18} = 11,77.$$

L'extrémité de cette abscisse est à l'intersection g du rayon et de la perpendiculaire élevée au point G de l'axe des abscisses. On trouvera de la même manière le centre de gravité g' de l'arc BF, et la droite gg', qui joint les centres de gravité des deux demi-arcs, est partagée en deux parties égales au point G, centre de gravité de l'arc EBF.

54. Lorsque la question proposée a pour objet la recherche du centre de gravité d'une surface plane, on place les axes des

coordonnées de manière que cette surface soit située dans le plan des x, y, et pour appliquer les formules

$$\begin{aligned} V &= v + v' + v'' + \text{etc.}, \\ VX &= vx + v'x' + v''x'' + \text{etc.}, \\ VY &= vy + v'y' + v''y'' + \text{etc.}, \end{aligned}$$

il faut d'abord remplacer le volume et ses diverses parties par les expressions analogues de la surface et de ses éléments infiniment petits.

Soit Auv (*fig.* 32) un demi-segment de courbe, que nous supposerons divisé en éléments infiniment petits, formés par des parallèles à l'axe AY; l'un de ces éléments est le trapèze $uvv'u'$, et si l'on mène ur' parallèle à l'axe AX, cet élément de surface aura pour mesure $ydx + \frac{1}{2}dxdy$, ou seulement ydx, parce que le second terme, qui est un infiniment petit du second ordre, doit être négligé.

Si l'on désigne par t la somme de tous les trapèzes élémentaires, ou l'aire du demi-segment Auv, en observant que les moments de l'élément de surface ydx, par rapport aux axes des y et des x, sont $x \times ydx$ et $\frac{1}{2}y \times ydx$, la somme des volumes partiels, et celles des moments de volumes, seront remplacées par des expressions analogues de surfaces, dans les équations suivantes:

$$t = \int ydx, \quad tX = \int xydx, \quad tY = \tfrac{1}{2}\int y^2dx;$$
$$X = \frac{\int xydx}{\int ydx}.$$

Lorsque la courbe est donnée par son équation, on élimine d'abord une des variables des équations précédentes

par le moyen de celle de la courbe; on obtient ensuite, par l'intégration, les valeurs des coordonnées du centre de gravité.

La courbe étant une ellipse, dont l'un des sommets est placé à l'origine A des coordonnées, elle a pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 2ab^2x,\ \ y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),\ \ y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2};$$

cette valeur de y étant substituée dans celle de l'abscisse du centre de gravité, on aura

$$X = \frac{\int xdx \times \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}}{\int dx \times \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{\int xdx\sqrt{2ax - x^2}}{\int dx\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Le rapport des axes disparaît, ce qui réduit le problème à celui qui a pour objet de déterminer l'abscisse du centre de gravité du segment de cercle dont la flèche est la même que celle du segment d'ellipse, et qui est décrit sur son grand axe comme diamètre.

Le dénominateur a pour intégrale l'aire du demi-segment de cercle LAv; en intégrant le numérateur, on trouve

$$\frac{xdx\,(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}d(2ax - x^2)} = \frac{x\,(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\,(a - x)}.$$

Si l'on met $a - x$ à la place de x, dans le numérateur de cette intégrale, l'abscisse du centre de gravité sera comptée à partir du centre O, et l'on aura

$$X = \frac{\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{t};$$

14

c'est ce qu'on aurait trouvé si l'on avait pris la valeur de y dans l'équation de l'ellipse rapportée à son centre.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le demi-segment ; en prenant le segment entier, la formule devient

$$X = \frac{\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2t} = \frac{\frac{2}{3}y^3}{2t} = \frac{\frac{1}{12}\overline{LN}^3}{LANL}.$$

Ce résultat est le même que celui que nous avons trouvé pour la distance du centre du cercle au centre de gravité de l'un de ses segments ; d'où il résulte que le segment d'ellipse $uAwu$, et le segment LANL, qui lui correspond dans le cercle décrit sur son grand axe comme diamètre, ont leurs centres de gravité G' sur cet axe, à la même distance du point O, centre commun des deux courbes.

55. *Trouver le centre de gravité d'un segment de parabole.* — Ce centre est sur l'axe de la parabole ; pour trouver son abscisse, ou sa distance du sommet de la courbe, nous prendrons les deux formules

$$t = \int y dx, \quad tX = \int xy dx ;$$

en divisant la seconde par la première, nous aurons

$$X = \frac{\int yx dx}{\int y dx}.$$

La parabole a pour équation

$$y^2 = px, \quad y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}},$$

et par la substitution de cette valeur y, l'expression de l'abs-

cisse du centre de gravité devient

$$X = \frac{\int x^{\frac{3}{2}} dx}{\int x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} x.$$

On voit, par ce résultat, que la distance du sommet de la parabole au centre de gravité d'un segment de cette courbe, est aux $\frac{3}{5}$ de l'abscisse du même segment.

La solution de ce problème est l'une des découvertes d'Archimède, à qui l'on doit les premiers principes de la Statique.

Centres de gravité des surfaces de révolution.

56. Soit la courbe génératrice DMH (*fig.* 33), qui décrit, en tournant autour de l'axe AX situé dans son plan, une surface de révolution; désignons par S l'aire de cette surface, l'élément de courbe $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ décrira la surface d'un cône tronqué, qui sera l'élément de la surface S; si l'on mène MP et mp perpendiculaires à l'axe AX, le centre de gravité de cet élément de surface sera au milieu de Pp, et l'on pourra prendre $AP = x$ pour l'abscisse de ce centre de gravité, parce que cette abscisse ne diffère de x que d'une quantité infiniment petite.

La surface du cône tronqué décrit par l'élément de courbe Mm, aura pour mesure le produit de cet élément par la circonférence que décrit l'ordonnée $MP = y$, ou $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, et la somme de tous les éléments ou la surface entière $S = 2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}$; en désignant l'abscisse du centre de gravité de cette surface par X, on aura

$$SX = 2\pi \int xy \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Cette équation exprime que le moment du centre de gravité de la surface entière est égal à la somme des moments de tous ses éléments.

La valeur de X se déduit des deux équations précédentes ; en divisant la seconde par la première, on a

$$X = \frac{\int xy\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

57. Proposons-nous de trouver le centre de gravité de la surface du cône tronqué, décrit par la révolution de la ligne droite DH autour de l'axe OX (*fig.* 33).

Les axes ayant leur origine au point O, où le prolongement de la génératrice coupe l'axe des abscisses, on a l'équation $y = ax$, et en la différentiant, $dy = adx$, $dy^2 = a^2dx^2$.

En substituant les valeurs de y et dy^2 dans celle de l'abscisse du centre de gravité, il viendra

$$X = \frac{a\int x^2\sqrt{dx^2+a^2dx^2}}{a\int x\sqrt{dx^2+a^2dx^2}} = \frac{\int x^2dx}{\int xdx} = \frac{\frac{1}{3}x^3+C}{\frac{1}{2}x^2+C}.$$

Il faut détermiuer les constantes de manière que l'intégrale soit prise depuis $x = OB = \alpha$ jusqu'à $x = OE = \beta$; à la première de ces limites l'intégrale est nulle, et l'on a

$$x = \alpha,\quad 0 = \tfrac{1}{3}\alpha^3 + C,\quad C = -\tfrac{1}{3}\alpha^3,$$
$$x = \beta,\quad \int x^2dx = \tfrac{1}{3}\beta^3 + C = \tfrac{1}{3}\beta^3 - \tfrac{1}{3}\alpha^3;$$

on trouvera de la même manière

$$\int xdx = \tfrac{1}{2}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

En substituant ces expressions des intégrales, et divisant le numérateur et le dénominateur par leur plus grand commun diviseur $\beta - \alpha$, on trouvera

$$X = \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2}{\beta + \alpha} = \frac{2}{3}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta + \alpha}\right);$$

$$X - \alpha = \frac{2}{3}\beta - \alpha + \frac{2\alpha^2}{3(\beta + \alpha)} = \text{BG}.$$

Si l'on mène DF parallèle à l'axe OX, les triangles semblables HDF, DOB, donneront

$$\text{HE} - \text{DB} : \text{DB} :: \text{BE} : \alpha = \frac{\text{BE} \times \text{DB}}{\text{HE} - \text{DB}},$$

$$\beta = \text{BE} + \alpha = \frac{\text{BE} \times \text{HE}}{\text{HE} - \text{DB}};$$

en substituant les valeurs de α et β, effectuant les calculs et supprimant les termes qui se détruisent, on trouvera

$$\text{BG} = \frac{1}{3}\,\text{BE} \times \frac{2\text{HE} + \text{DB}}{\text{HE} + \text{DB}}.$$

Ce résultat est conforme à celui que nous avons trouvé pour déterminer le centre de gravité du trapèze; ce qui fait voir que le cône tronqué et le trapèze formé par la section du plan qui le coupe suivant son axe, ont leurs centres de gravité au même point de cet axe.

Centres de gravité des solides de révolution.

58. Dans les surfaces de révolution, l'élément de surface ou sa différentielle a pour expression $2\pi y ds$, ou $2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$: c'est le produit de la circonférence de la base d'un cylindre par sa hauteur infiniment petite. En mettant dans ce produit

la surface de la base du cylindre à la place de sa circonférence, son expression $\pi y^2\sqrt{dx^2+dy^2}$ sera la différentielle du volume, et en désignant ce volume par V, on aura $V=\pi\int y^2\sqrt{dx^2+dy^2}$. La somme des moments de tous les éléments de volume, pris par rapport à l'axe des y, sera exprimée par $\pi\int xy^2\sqrt{dx^2+dy^2}$. Cette somme est égale au moment VX du centre de gravité du volume entier, par rapport au même axe; ainsi, pour déterminer le point de l'axe d'un solide de révolution où se trouve son centre de gravité, on a les équations différentielles

$$V=\pi\int y^2\sqrt{dx^2+dy^2},\quad VX=\pi\int xy^2\sqrt{dx^2+dy^2},$$
$$X=\frac{\int xy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int y^2\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

que l'on intégrera, après les avoir réduites à une seule variable.

59. Soit proposé de trouver le centre de gravité du tronc de cône décrit par la révolution du trapèze BDHE (*fig.* 33), autour de l'axe OX.

L'origine des coordonnées étant au point O, où l'axe des abscisses est coupé par le prolongement de la génératrice HD, on a l'équation $y=ax$, qui donne les valeurs suivantes:

$$y^2=a^2x^2,\quad dy^2=a^2dx^2,$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation différentielle de l'abscisse du centre de gravité, on aura

$$X=\frac{a^2\int x^3\sqrt{dx^2+a^2dx^2}}{a^2\int x^2\sqrt{dx^2+a^2dx^2}}=\frac{\int x^3dx}{\int x^2dx}=\frac{\frac{1}{4}x^4+C}{\frac{1}{3}x^3+C'}.$$

Pour déterminer les constantes, nous ferons

$$x = \mathrm{OB} = \alpha, \quad x = \mathrm{OE} = \beta;$$

ce qui donnera, pour l'intégrale du numérateur,

$$x = \alpha, \quad 0 = \tfrac{1}{4}\alpha^4 + \mathrm{C}, \quad \mathrm{C} = -\tfrac{1}{4}\alpha^4,$$
$$x = \beta, \quad \int x^3 dx = \tfrac{1}{4}\beta^4 + \mathrm{C} = \tfrac{1}{4}(\beta^4 - \alpha^4).$$

On trouve de la même manière $\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3)$, pour l'intégrale du dénominateur, et l'abscisse du centre de gravité devient

$$\mathrm{X} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta^4 - \alpha^4}{\beta^3 - \alpha^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta^3 + \beta^2\alpha + \beta\alpha^2 + \alpha^3}{\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2}.$$

En faisant, pour abréger,

$$\mathrm{BD} = b, \quad \mathrm{EH} = c \ \text{et} \ \mathrm{BE} = h,$$

les triangles semblables HDF, DOB, donneront

$$\alpha = \frac{bh}{c - b}, \quad \beta = \frac{ch}{c - b};$$

substituant ces valeurs de α et β, et supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$\mathrm{X} - \alpha = \mathrm{BG}' = \frac{h}{4} \cdot \frac{3c^2 + 2cb + b^2}{c^2 + cb + b^2}.$$

C'est la formule que nous avons trouvée par la première solution.

On pourrait résoudre beaucoup d'autres problèmes sur les

centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides, en y appliquant les formules différentielles que nous venons de démontrer; les exemples que nous avons donnés suffisent pour montrer la manière de se servir de ces formules, soit dans les différents cas où l'on pourra avoir besoin de les appliquer, soit comme exercices pour se familiariser avec le calcul analytique.

Méthode centrobarique.

Il nous reste encore à faire connaître l'une des plus belles et des plus utiles applications de la théorie des centres de gravité; elle consiste dans un théorème que Papus avait énoncé et qui était resté dans l'oubli. Le père Guldin, professeur de Mathématiques dans les colléges des Jésuites, a nommé ce théorème *méthode centrobarique*, dans un Traité sur les centres de gravité, publié à Vienne en 1635 et 1642; il n'est pas parvenu à le démontrer, mais il a fait voir par un grand nombre d'applications que cette méthode, qu'on appelle aussi *règle* ou *théorème de Guldin*, conduit aux mêmes résultats, pour la mesure des surfaces et celle des solides de révolution, que ceux que l'on obtient par les règles qui sont démontrées dans la Géométrie.

Une ligne, ou une surface plane, tournant autour d'une ligne droite fixe située dans le même plan, décrivent une surface de révolution, ou un solide, qui ont pour mesure le produit de la longueur de la ligne par la circonférence que décrit son centre de gravité, ou le produit de l'aire de la surface par la circonférence décrite par son centre de gravité.

La démonstration de ce théorème est facile, en y appliquant les considérations et les formules dont nous venons de faire usage pour déterminer les centres de gravité.

60. Soit DMH (*fig.* 33) un arc de courbe situé dans le même plan que l'axe AX des abscisses; par les extrémités D et H de cet arc que nous désignerons par s, abaissons DB, HE, perpendiculaires sur l'axe; si l'on fait tourner la figure BDMHE autour de cet axe, l'arc DMH décrira une surface dont il s'agit de trouver la mesure.

Supposons que cette surface soit partagée en zones infiniment minces, et soit $Mm = ds$ la hauteur de l'une de ces zones; désignons les coordonnées AP, PM, du point M par x et y, la zone qui forme l'élément de surface, est un cône tronqué, dont la surface convexe a pour mesure le produit de la circonférence d'une section faite à égale distance de ses deux bases multipliées par son côté, elle a pour expression $2\pi\left(y + \frac{1}{2}dy\right)ds$, ou seulement $2\pi y ds$, parce que le second terme est un infiniment petit du second ordre qui doit être négligé.

En désignant par S la surface décrite par la révolution de l'arc s, on aura

$$S = 2\pi \int y ds = 2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

On a d'ailleurs l'arc $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, et si l'on prend les moments par rapport à l'axe AX, en appelant Y l'ordonnée du centre de gravité de l'arc s, et observant que y est l'ordonnée du centre de gravité de l'élément de courbe infiniment petit Mm, on aura l'équation suivante

$$sY = \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

L'intégrale est la même dans les seconds membres de ces

deux équations, parce qu'elle est composée des mêmes termes et qu'elle doit être prise entre les mêmes limites; ainsi en divisant la première équation par la seconde, il viendra

$$\frac{S}{sY}=2\pi, \quad S=s\times 2\pi Y.$$

Ce qui fait voir, 1° que la surface décrite par la révolution de l'arc s a pour mesure le produit de la longueur de cet arc par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Considérons maintenant le solide engendré par la figure plane BDMHE, tournant autour de l'axe fixe AX, situé dans le même plan.

La surface génératrice BDMHE, étant divisée en éléments infiniment minces, par des ordonnées ou des perpendiculaires à l'axe AX, l'élément superficiel $MPpm$, formé par deux ordonnées consécutives y et $y+dy$, dont la distance $Pp=dx$, produirait un cône tronqué; mais en négligeant les infiniment petits du second ordre, ce solide est un cylindre qui a pour mesure πy^2dx.

Désignons par V le volume entier engendré par la révolution de la surface génératrice, nous aurons

$$V=\pi\int y^2dx.$$

En désignant par t le nombre des tranches infiniment minces contenues dans la surface génératrice, ou l'aire de cette surface, on aura $t=\int ydx$; représentons par Y l'ordonnée du centre de gravité de la surface entière, celle du centre de gravité de l'élément de surface est $\frac{1}{2}y$, et en prenant les moments par rapport à l'axe des x, on a l'équation

$$tY=\frac{1}{2}\int y^2dx.$$

Ces deux équations renferment la même intégrale, que l'on fait disparaître en les divisant l'une par l'autre, et l'on trouve

$$V = t \times 2\pi Y.$$

Donc, 2°. Le volume d'un solide de révolution a pour mesure le produit de la surface génératrice par la circonférence qui a pour rayon l'ordonnée du centre de gravité de cette surface.

Nous avons supposé que la génératrice faisait une révolution entière autour de l'axe fixe; si elle ne décrit qu'une portion de circonférence, en désignant par n le nombre de degrés, minutes et secondes contenus dans l'angle, ou l'arc décrit, à la place de 2π, qui représente la circonférence dont le rayon est l'unité, il faudra mettre, dans la formule, la longueur de l'arc décrit du même rayon : cet arc aura pour expression

$$\frac{2\pi \times n}{360^\circ} = \frac{n}{27^\circ,2958} = \frac{n}{27^\circ 17' 44''};$$

si l'on désigne le volume par V', la formule deviendra

$$V' = t \times \frac{n}{27^\circ 17' 44''}.Y.$$

Le théorème que nous venons de démontrer fournit des moyens simples et faciles pour mesurer la surface et le volume d'un corps rond, lorsque la génératrice et son centre de gravité sont connus; nous allons en faire l'application à quelques exemples.

61. Le centre de gravité d'une ligne droite a est au milieu de sa longueur; en faisant tourner cette droite dans un plan, autour de l'une de ses extrémités, elle décrira la surface d'un

cercle, et la circonférence décrite par son centre de gravité aura pour rayon $\frac{1}{2}a$; la circonférence dont le rayon est l'unité a une longueur exprimée par $2\pi = 2 \times 3,14159....$ et les circonférences étant comme les rayons, celle dont le rayon est $\frac{1}{2}a$ aura pour mesure $2\pi \times \frac{1}{2}a = \pi a$; en désignant par S l'aire du cercle décrit par la génératrice, on aura, d'après le théorème de Guldin,

$$S = \pi a \times a = 2\pi a \times \frac{1}{2}a = \pi a^2.$$

Ce qui fait voir, comme on le sait d'ailleurs par la Géométrie, que l'aire du cercle est égale au produit de sa demicirconférence par son rayon, ou au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon, ou enfin au produit du rapport de la demi-circonférence au rayon par le carré du rayon.

Si la génératrice ne fait pas une révolution entière, elle décrira un secteur de cercle. Supposons qne l'angle au centre soit de 90 degrés, il faudra remplacer la circonférence 2π par l'arc $\frac{2\pi n}{360} = \frac{2\pi \times 90}{360} = \frac{1}{2}\pi$; en nommant S' l'aire du secteur, on aura

$$S' = \frac{1}{2}\pi a \times \frac{1}{2}a.$$

Puisque l'angle au centre est de 90 degrés, le secteur est le quart du cercle, et l'on voit qu'il a pour mesure le produit du quart de la circonférence par la moitié du rayon, ce qui est conforme à la règle démontrée dans la Géométrie.

Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de l'arc de cercle DMH (*fig.* 33), *autour du rayon* CA. —Menons le rayon CK, qui partage en deux parties égales

l'arc DMH; le centre de gravité g de cet arc est sur le rayon CK, et nous avons trouvé (43) $Cg = \frac{DH \times CK}{\text{arc DMH}}$, pour l'expression de sa distance au centre du cercle.

Du centre de gravité g abaissons, sur le rayon CA, la perpendiculaire gq, cette perpendiculaire sera le rayon que décrira le centre de gravité de l'arc DMH, et le triangle rectangle Cqg donne $gq = Cg \times \sin gCq$.

Par le point D, menons DF parallèle à AC; les deux triangles Cqg, DFH, qui ont leurs côtés parallèles sont semblables, et en comparant les sinus des angles homologues, on a

$$\sin gCq = \sin DHF = \frac{DF}{DH};$$

les valeurs de Cg et $\sin gCq$ étant substituées dans celle de gq, en observant que $DF = BE$, on aura

$$gq = \frac{DH \times CK}{\text{arc DMH}} \times \frac{DF}{DH} = \frac{CK \times BE}{\text{arc DMH}};$$

multipliant chaque membre par $2\pi \times$ arc DMH, cette équation devient

$$2\pi \times gq \times \text{arc DMH} = 2\pi \times CK \times BE = 2\pi \times Eh \times BE.$$

D'après le théorème de Guldin, le premier membre exprime l'aire de la surface engendrée par la révolution de l'arc DMH, ou de la zone sphérique décrite par cet arc; le second membre est l'expression de la surface convexe du cylindre de même hauteur que cette zone, et dont le rayon de la base est égal au rayon de l'arc, ou à celui de la sphère; ainsi on retrouve cette propriété, démontrée dans la Géométrie, que la surface d'une zone sphérique quelconque est égale à celle

d'une portion, de même hauteur, du cylindre circonscrit à la sphère.

62. *Trouver la solidité du cône engendré par la révolution du triangle rectangle* OEH (*fig.* 33), *autour du côté* OE. — Le centre de gravité du triangle OEH, est au tiers de la ligne droite qui joint le sommet H et le milieu du côté opposé OE, à partir de ce côté; et la distance du centre de gravité du triangle au même côté, ou le rayon du cercle que décrit le centre de gravité, est le tiers du côté EH; ainsi la circonférence de ce cercle est égale à $2\pi \times \frac{1}{3}\text{EH} = \frac{2}{3}\pi\text{EH}$; si l'on multiplie cette circonférence par $\frac{1}{2}\text{OE} \times \text{EH}$, qui représente la surface du triangle, on aura $\frac{1}{3}\pi\overline{\text{EH}}^2 \times \text{OE}$; c'est-à-dire que la solidité du cône droit est le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

63. *Trouver la solidité du segment d'ellipsoïde engendré par la révolution du demi-segment d'ellipse* BQ′QE (*fig.* 33), *autour du demi-grand axe* AC. — Les demi-axes CA, CN, étant représentés par a et b, en plaçant l'origine des coordonnées au centre C, on a pour l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

L'ordonnée Y, du centre de gravité de la surface génératrice BQ′QE, a pour expression (54)

$$\text{Y} = \frac{\frac{1}{2}\int y^2dx}{\int ydx};$$

en substituant la valeur de y^2 prise dans l'équation de l'ellipse,

cette formule devient

$$Y=\frac{\frac{b^2}{2a^2}\int(a^2-x^2)dx}{\int ydx}=\frac{\frac{b^2}{2a^2}\int(a^2dx-x^2dx)}{\int ydx}=\frac{\frac{b^2}{2a^2}(a^2x-\frac{1}{3}x^3)+C}{\int ydx}.$$

Pour déterminer la constante C, nous observerons que l'intégrale doit être prise depuis $x=\text{CE}=\alpha$, jusqu'à $x=\text{CB}=\beta$; ces abscisses étant substituées successivement à la place de x, d'après le procédé dont nous avons donné le détail dans l'exemple (59), on trouvera

$$Y=\frac{\frac{b^2}{6a^2}(\beta-\alpha)[3a^2-(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)]}{\int ydx}.$$

Le dénominateur $\int ydx$ représente l'aire de la surface génératrice; en désignant par V le volume qu'elle engendre, et multipliant les deux membres par $2\pi\int ydx$, il viendra

$$V=2\pi Y\int ydx=2\pi\frac{b^2}{6a^2}(\beta-\alpha)[3a^2-(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)].$$

Si la surface génératrice est le quart d'ellipse CAQN, l'abscisse $\alpha=0$, $\beta=a$; le solide est le demi-ellipsoïde, et il a pour mesure

$$V=2\pi Y\int ydx=2\pi\frac{b^2}{6a^2}\times a(3a^2-a^2)=\frac{2}{3}\pi ab^2.$$

L'ellipsoïde est le double de cette quantité; on voit que sa solidité est le tiers du produit de quatre fois la surface du cercle décrit avec le demi-petit axe comme rayon multiplié par le demi-grand axe.

64. Proposons-nous de trouver la mesure du solide engendré par la révolution du quart d'ellipse CAQN (*fig.* 33), autour de son demi-petit axe CN.

Dans ce mouvement de rotation, le centre de gravité du quart d'ellipse CAQN, décrit un cercle qui a pour rayon l'abscisse de ce même centre, et qui est exprimée par la formule (54)

$$X = \frac{\int xydx}{\int ydx}, \quad 2\pi X \int ydx = 2\pi \int yxdx;$$

en substituant, dans le second membre, la valeur de y prise dans l'équation de l'ellipse, il viendra

$$\frac{2\pi b}{a}\int(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} xdx = \frac{2\pi b}{a} \cdot \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} xdx}{\frac{3}{2} d(a^2-x^2)} = -\frac{2\pi b}{3a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

La constante C doit être déterminée de manière que l'intégrale soit prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, ainsi l'on aura

$$0 = -\frac{2\pi b}{3a} \times a^3 + C, \quad C = \frac{2\pi a^2 b}{3};$$

$$V = 2\pi X \int ydx = -\frac{2\pi b}{3a}(a^2 - a^2) + C = \frac{2}{3}\pi a^2 b.$$

Ce résultat ne diffère de celui que nous avons trouvé pour la solution du problème précédent, que par le changement, ou la permutation des demi-axes de l'ellipse, dont le quart forme la surface génératrice, dans l'un et l'autre de ces problèmes.

Lorsque les deux axes sont égaux, la surface génératrice est un quart de cercle, et la formule devient

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^2 \times \frac{1}{3} a;$$

c'est le produit de deux grands cercles par le tiers du rayon, ou le volume de la demi-sphère.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les problèmes auxquels on peut appliquer la méthode centrobarique; ceux que nous venons de résoudre suffisent pour la faire apprécier, et pour donner une idée de l'avantage que les sciences peuvent mutuellement se procurer. Tous les traités de Mécanique renferment cette méthode; parmi les auteurs dont les recherches ont eu pour objet de la développer et d'en faire connaître les usages, nous citerons le Mémoire de Varignon, intitulé : Réflexions sur l'usage que la Mécanique peut avoir en Géométrie, publié dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1714, et les derniers chapitres du livre premier de la Mécanique statique de Camus, où l'on trouvera des règles pratiques, déduites du théorème de Guldin, pour le toisé des voûtes.

CHAPITRE V.

DES MACHINES.

65. Une machine est un instrument dont l'objet consiste, en général, à transmettre l'action d'une puissance ou d'une force, du point où elle est appliquée au point où l'on se propose de la faire agir, pour vaincre un obstacle et produire un travail dont l'exécution serait difficile, et même qnelquefois impossible, par l'application directe et immédiate des forces que l'on pourrait y employer.

On appelle *moteur,* la force appliquée à une machine pour lui imprimer le mouvement qui lui est nécessaire, et l'obstacle que le moteur doit vaincre, par le moyen de cette machine, se uomme *résistance*.

Pour calculer l'effet d'un machine, on cherche d'abord les conditions d'équilibre entre le moteur et la résistance. Cette recherche se déduit des principes qui ont été exposés dans les chapitres qui précèdent.

Les machines dont nous nous occuperons dans ce chapitre, sont celles que l'on nomme *machines simples :* nous les diviserons en sept classes, savoir: les cordes, qu'on appelle aussi machines funiculaires, le levier, la poulie, le treuil, le plan incliné, la vis et le coin.

Plusieurs autres machines simples seront analysées à la suite de chacune de celles qui viennent d'être désignées; celles-ci étant les principales, elles ont donné naissance à d'autres machines de même espèce, que l'on peut regarder comme des variétés; par exemple, la balance, la romaine et

quelques autres instruments de pesage, seront décrits à la suite du levier, dont le principe a été employé pour les former. Nous donnerons la description succincte de la machine construite pour l'usage des ponts à bascule, qui servent à peser les voitures; cette machine est l'un des plus ingénieux systèmes de leviers que l'on ait imaginés.

Pour faciliter l'application des principes qui servent à établir les lois de l'équilibre des machines simples, nous suivrons une marche analogue à celle qui a été adoptée dans les premiers chapitres; c'est-à-dire que nous considérerons les machines comme étant dépouillées de tout ce qui pourrait gêner les effets qu'elles doivent produire; ainsi les cordes seront supposées réduites à des fils inextensibles, parfaitement flexibles et d'un diamètre assez petit pour qu'il puisse être négligé sans erreur sensible; les barres et les tiges seront supposées réduites à leurs axes, et nous négligerons les effets de l'adhérence et des frottements.

Après avoir établi les lois de l'équilibre des machines simples, dans cet état idéal de simplicité, il ne restera qu'à introduire, dans les formules qui expriment ces lois, les quantités dont on a fait abstraction, et qui doivent être déterminées, pour chaque machine, d'après les formes et les dimensions des diverses pièces dont elle est composée.

Nous ferons connaître plus loin, par quelques exemples, les modifications que les formules éprouvent, lorsqu'on y fait entrer les résistances que l'on a négligées dans les premières solutions.

Les machines composées sont en si grand nombre, que l'étude de cette partie importante de nos connaissances semble offrir de grandes difficultés; mais lorsqu'on est parvenu à bien connaître les propriétés des machines simples, on peut

en faire l'application pour étudier une machine composée, quelle que soit sa construction, car il suffit de la décomposer et d'en observer avec attention toutes les parties, qui ne sont autre chose que des machines simples, combinées de manière que leurs fonctions concourent à produire l'effet que l'on s'est proposé d'obtenir.

Machine funiculaire.

La machine funiculaire est celle qui est composée de cordes, qui sont employées pour élever un fardeau, traîner un corps pesant, ou pour vaincre une résistance quelconque, par le moyen d'une ou de plusieurs forces.

Une corde étant tirée à chacun de ses bouts par deux forces qui agissent en sens contraire, si ces forces sont égales, elles se font équilibre, et la tension de la corde est égale à l'une d'elles; en effet, on peut remplacer l'une de ces forces par un point fixe auquel la corde sera attachée, alors elle éprouvera par l'action de l'autre force une tension égale à celle qui était produite par les deux forces égales et opposées.

Lorsque les deux forces sont inégales, la tension de la corde, tirée en sens contraire par ces forces, a pour mesure l'intensité de la plus petite force; car la plus grande force peut être divisée en deux parties, dont l'une soit égale à la plus petite : si ces deux forces égales et opposées agissaient seules, elles seraient en équilibre, et l'une d'elles exprimerait la tension de la corde; par conséquent, l'autre partie de la plus grande force n'aura aucune influence sur cette tension.

66. *Trouver les conditions d'équilibre entre trois forces,*

qui agissent par le moyen de trois cordes, liées entre elles par un nœud. — Soient les trois forces P, Q, S (*fig.* 34), qui agissent par le moyen de trois cordes liées entre elles par un nœud A; si l'équilibre existe entre ces trois forces, 1° les trois cordons AP, AQ et AS seront dans le même plan, car les deux forces P, Q, dont les directions AP, AQ, forment l'angle PAQ, sont dans le même plan; si la direction AS de la troisième force S n'était pas dans le plan de cet angle, en la décomposant en deux autres, l'une dirigée dans le plan PAQ et l'autre perpendiculaire à ce plan, cette dernière force ne serait détruite par aucune force du système, et par conséquent l'équilibre n'existerait pas; donc les trois cordons AP, AQ, AS, sont dans le même plan; 2° l'une quelconque des trois forces P, Q et S, sera égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

Si l'on prend sur les cordons AP, AQ, les longueurs AB, AC proportionnelles aux forces P, Q, et que l'on achève le parallélogramme ABDC, la diagonale AD représentera la résultante R des forces P, Q; ainsi la troisième force S, qui doit être égale et opposée à la résultante R, sera représentée par AE = AD, et l'on aura

$$P : Q :: AB : AC \text{ ou } BD,$$
$$P : S :: AB : AE \text{ ou } AD;$$

ces deux proportions donnent

$$P : Q : S :: AB : BD : AD;$$

mais dans tout triangle rectiligne, les côtés sont comme les sinus des angles opposés, ou comme les sinus de leurs sup-

pléments ; ainsi l'on a

$$AB : BD : AD :: \sin ADB : \sin BAD : \sin ABD$$
$$:: \sin CAE : \sin BAE : \sin BAC;$$

donc $$P : Q : S :: \sin CAE : \sin BAE : \sin BAC;$$

c'est-à-dire que si les trois forces P, Q, S, qui agissent suivant trois cordes attachées par un nœud, sont en équilibre, chacune de ces forces sera proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.

On a donc six quantités à considérer, pour établir l'équilibre entre les trois forces P, Q, S; et lorsque trois de ces quantités seront connues, on trouvera les trois autres, soit par une construction graphique, soit par la trigonométrie; mais il doit y avoir au moins l'une des forces parmi les quantités connues, car si l'on connaissait seulement les angles, on ne pourrait en déduire que les rapports des côtés, ou les rapports des forces.

Si les trois forces P, Q, S sont connues, on trouvera les angles en décrivant le triangle ABD avec trois côtés proportionnels à ces forces, ou bien on calculera les angles par la trigonométrie. Si l'on connaissait les deux forces P, S, et l'angle $CAB = DBP$, alors le triangle ABD serait déterminé, car les deux côtés AB, AD, et l'angle $ABD = 180° - DBP$, opposé à l'un de ces côtés, étant connus, on peut trouver les autres parties du triangle par une construction géométrique ou par la trigonométrie.

Les tensions des cordons AP, AQ, sont exprimées par les côtés AB, AC du parallélogramme ABDC; si au lieu des forces P, Q, qui tirent ces cordons, ils sont attachés aux

points fixes P, Q; alors AB, AC exprimeront les pressions sur les points fixes, suivant les directions PA et QA.

Lorsque les forces P, Q sont très grandes par rapport à la force S, la diagonale AD est très petite, et l'angle BAC devient très obtus.

Supposons que la corde PAQ (*fig.* 35) qui est tirée à l'une de ses extrémités par la force P, soit attachée à un point fixe qui remplace la force Q; on a la proportion

$$P : S :: \sin CAE : \sin BAC.$$

Si la corde était tendue en ligne droite, on aurait

$$\sin CAE = \sin 90° = 1, \quad \sin BAC = \sin 180° = 0;$$

et la proportion deviendrait

$$P : S :: 1 : 0, \quad P = \frac{S}{0} = \infty.$$

On voit par ce résultat que quelque petite que soit la force S, la force P ne sera jamais assez grande pour tendre la corde en ligne droite.

Nous avons supposé que les trois cordons étaient réunis au point A par un nœud fixe; si le cordon AS est attaché à la corde PAQ par le moyen d'un nœud coulant ou d'un anneau qui puisse glisser librement, alors les trois forces P, Q, S, ne seront en équilibre que dans le cas où le prolongement AR du cordon SA partagera l'angle PAQ en deux parties égales. En effet, il est évident que si les deux angles PAR, QAR ne sont pas égaux, l'équilibre n'existera pas, car le cordon AS glissera du côté du plus grand de ces angles.

67. Une corde, d'une longueur donnée, doit être atta-

chée par ses extrémités à deux points fixes, donnés de position; trouver à quel point de cette corde, un poids qui peut glisser par un anneau, ou par un nœud coulant, sera en équilibre.

Soit BAC (*fig.* 36) la corde donnée, dont les extrémités sont attachées aux points donnés B, C; soit P le poids soutenu par le cordon AP, attaché à la corde BAC par un nœud coulant ou par un anneau: on propose de trouver le point A où le cordon qui soutient le poids P restera en équilibre.

Par le point B menez la ligne droite horizontale BD, prolongez le cordon PA, qui coupera la droite BD au point L; par le point C menez ECF parallèle à AL, et prolongez BA jusqu'à la rencontre de cette parallèle au point F. D'après cette construction,

$$\text{l'angle BAL} = \text{CAL} = \text{AFC}, \text{ et l'angle CAL} = \text{ACF};$$

donc le triangle ACF est isoscèle, et le côté AC = AF; par conséquent BF est égale à la corde donnée BA + AC.

Dans le triangle rectangle BEF, on connaît l'hypoténuse BF, et par la position des points donnés B et C, on connaît aussi le côté BE, ainsi l'on déterminera, par la trigonométrie, le troisième côté EF et l'angle BFE; d'ailleurs EC est connu; par conséquent, dans le triangle isoscèle ACF, on connaît le côté CF et l'angle AFC; la résolution de ce triangle fera connaître le côté CA.

Le point A, où l'équilibre aura lieu, peut être déterminé par la construction suivante: par le point C menez la verticale ECF; du point B comme centre, et avec un rayon BF égal à la longueur de la corde donnée, décrivez un arc de cercle qui coupera la verticale au point F; menez la droite

BF, et par le point G, milieu de FC, menez l'horizontale GA, qui coupera BF au point demandé A.

Autre manière. Par les points fixes B et C, menez les verticales BH, CF; des points B et C comme centre, et avec un rayon égal à la longueur de la corde donnée, décrivez deux arcs de cercle qui coupent les verticales en F et H; menez les droites BF et CH, leur intersection A sera le point demandé, où le cordon qui soutient le poids P restera en équilibre.

On trouve une application de ce problème dans la suspension des réverbères qui éclairent les rues des villes; la longueur de la corde et les points de suspension doivent être déterminés de manière que le réverbère soit placé au point le plus convenable pour l'éclairage; c'est ce que l'expérience a fait connaître aux personnes chargées de diriger ces travaux, et aux ouvriers qui les exécutent avec une adresse et une célérité qui étonnent les observateurs.

68. Lorsque des cordons sont attachés à une corde par des nœuds, et qu'une force est appliquée à chaque cordon, la corde forme une ligne brisée, ou une portion de polygone, qu'on appelle *polygone funiculaire;* nous allons chercher les conditions qui doivent être satisfaites pour que toutes les forces appliquées à un polygone funiculaire soient en équilibre; nous supposerons d'abord qu'il n'y ait que trois cordons à chaque nœud, et que tous les nœuds soient fixes.

Soit le polygone funiculaire formé par la corde MBCDEN (*fig.* 37) situé dans un plan, les forces M, N étant appliquées aux extrémités de cette corde, et les forces P′, P″, P‴, P^iv, appliquées aux cordons BP′, CP″, DP‴, EP^iv, attachés à la même corde, par des nœuds fixes, aux points B, C, D, E, et situés dans le plan du polygone. Lorsque toutes les forces

qui agissent sur le système sont en équilibre, celles qui sont appliquées à chaque nœud doivent aussi être en équilibre.

Si les forces M, P′, sont représentées par B*b*, B*b*′, en achevant le parallélogramme *bb*′, la résultante de ces deux forces sera représentée par la diagonale B*r*′, qui est sur le prolongement du cordon BC; supposons que cette résultante soit appliquée au point C, elle sera représentée par C*c* = B*r*′; la force P″ étant représentée par C*c*′, si l'on décrit le parallélogramme *cc*′, la diagonale C*r*″ de ce parallélogramme, qui sera sur le prolongement du cordon CD, représentera la résultante des trois forces M, P′, P″.

En composant de la même manière les forces N, P^{iv}, P‴, on trouvera que la résultante de ces trois forces est représentée par la diagonale D*r*‴ du parallélogramme *dd*′; cette diagonale est sur le prolongement du cordon CD: toutes les forces appliquées au polygone se réduisent donc à deux forces, qui agissent en sens contraire aux extrémités d'un côté, et puisque l'équilibre existe dans le système, ces deux forces sont égales; par conséquent la condition qui doit être satisfaite pour que le polygone funiculaire MBCDEN soit en équilibre, est que la somme de toutes les forces M, P′, P″,... appliquées à ce polygone soit égale à zéro.

1re *Remarque.* — Les forces appliquées à un polygone funiculaire étant en équilibre, chaque cordon est tiré par deux forces égales et opposées: ainsi la tension du cordon BC est égale à la résultante des deux forces M et P′, ou à la résultante des quatre autres forces P″, P‴, P^{iv}, N. La tension du deuxième cordon CD est égale à la résultante des trois forces M, P′, P″, et ainsi de suite; par conséquent, lorsque les forces et leurs directions seront données, on trouvera, par la

composition des forces, la tension de chaque cordon, et l'on pourra déterminer par l'expérience le degré de force que doit avoir la corde pour résister à ces tensions.

2[e] *Remarque.* — Si l'on prolonge les deux cordons extrêmes du polygone funiculaire jusqu'à leur rencontre, la résultante de toutes les forces appliquées à ce polygone passera par le point où ces deux cordons extrêmes se coupent. En effet, si l'on prolonge les deux cordons extrêmes MB, NE, jusqu'à leur rencontre F, la résultante des deux forces M et N passera par le point F; mais la résultante de deux quelconques des forces appliquées au polygone funiculaire est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres; donc la résultante de toutes les autres forces doit aussi passer par le point F. On peut donc supposer que toutes les forces appliquées au polygone funiculaire sont transportées parallèlement à elles-mêmes au point F.

69. La méthode que nous avons suivie pour trouver la solution du problème précédent est fondée sur des constructions géométriques qui donnent un résultat peu exact, surtout dans les dessins faits sur une petite échelle: nous allons reprendre ce problème, et nous y appliquerons le calcul par le moyen des lignes trigonométriques.

Les trois forces appliquées à chaque nœud étant en équilibre, chacune de ces forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres; si l'on désigne par T' la tension du cordon BC, les forces appliquées au nœud B donneront

$$M : P' : T' :: \sin CBP' : \sin CBM : \sin MBP';$$

en désignant par T'', T''', les tensions qu'éprouvent les cor-

dons CD, DE, on aura pareillement

$T' : P'' : T'' :: \sin DCP'' : \sin BCD : \sin BCP''$, pour le nœud C;
$T'' : P''' : T''' :: \sin EDP''' : \sin EDC : \sin CDP'''$, pour le nœud D;
$T''' : P^{IV} : N :: \sin NEP^{IV} : \sin NED : \sin DEP^{IV}$, pour le nœud E.

En négligeant les rapports des forces P', P'', P''', P^{IV}, on aura les proportions suivantes:

$$M : T' :: \sin CBP' : \sin MBP';$$
$$T' : T'' :: \sin DCP'' : \sin BCP'';$$
$$T'' : T''' :: \sin EDP''' : \sin CDP''';$$
$$T''' : N :: \sin NEP^{IV} : \sin DEP^{IV}.$$

La première proportion fait connaître le rapport des tensions des deux cordons consécutifs MB et BC, car les angles CBP′, MBP′, étant connus, on trouvera sin CBP′, sin MBP′, dans les tables de sinus.

Le deux premières proportions étant multipliées terme à terme, en négligeant le facteur commun T', on aura

$$M : T'' :: \sin CBP' \times \sin DCP'' : \sin MBP' \times \sin BCP'';$$

cette proportion donne le rapport entre les tensions des deux cordons MB et CD. Enfin le produit des quatre proportions exprimera le rapport entre les tensions des deux cordons extrêmes MB et NE.

$$M : N :: \sin CBP' \times \sin DCP'' \times \sin EDP''' \times \sin NEP^{IV}$$
$$: \sin MBP' \times \sin BCP'' \times \sin CDP''' \times \sin DEP^{IV}.$$

Si les forces P', P'', P''', P^{IV}, qui agissent sur le polygone funiculaire MBCDEN (*fig.* 38), sont des poids, leurs directions seront verticales; le système étant en équilibre, les cor-

dons extrêmes MB, NE, peuvent être retenus par des forces qui leur sont appliquées, ou attachés aux points fixes M et N; alors les cordons BP′, CP″, DP‴, EP^{iv} seront parallèles entre eux, et tous ces cordons seront dans le même plan vertical. En effet, les trois cordons, ou les trois lignes droites BM, BC, BP′, sont dans le plan vertical qui passe par BP′, puisque le point B, sollicité par des forces qui agissent suivant ces droites, est en équilibre; par la même raison, les trois droites CB, CD, CP″, sont aussi dans le plan vertical qui passe par CP″, et ces deux plans verticaux n'en forment qu'un seul, puisqu'ils passent l'un et l'autre par la même ligne droite BC. On prouverait par un raisonnement semblable que tous les autres cordons sont situés dans ce même plan vertical.

Les cordons BP′, CP″ étant parallèles, la somme des angles CBP′, BCP″, est égale à deux angles droits, par conséquent ces angles sont suppléments l'un de l'autre, ce qui donne

$$\sin CBP' = \sin BCP'';$$

on a aussi, par la même raison,

$$\sin DCP'' = \sin CDP''',$$
$$\sin EDP''' = \sin DEP^{\text{iv}}.$$

D'après ces équations, le second rapport de la proportion qui exprime le rapport des tensions des deux cordons extrêmes du polygone funiculaire, renferme deux facteurs égaux dans chacun de ses termes; en supprimant ces facteurs égaux, prolongeant les cordons extrêmes jusqu'à leur rencontre au point F, et menant, par ce point, la verticale FH, on aura

$$M : N :: \sin NEP^{\text{iv}} : \sin MBP' :: \sin NFH : \sin MFH,$$

c'est-à-dire que les tensions des parties extrêmes de la corde sont réciproquement entre elles comme les sinus des angles que ces parties forment avec la verticale.

La résultante de tous les poids appliqués au polygone funiculaire, passe par le sommet de l'angle formé par les prolongements de ses côtés extrêmes.

L'effort de tous les poids P′, P″, etc., est soutenu par les deux côtés extrêmes MB, NE; par conséquent, la résultante de tous ces poids doit être égale et directement opposée à la résultante des tensions des côtés MB, NE; cette dernière résultante passe par le point F; donc la résultante de tous les poids P′, P″, etc., passe aussi par ce même point F, qui est le sommet de l'angle formé par les prolongements des côtés extrêmes.

Le centre commun de gravité de tous les poids P′, P″, etc., est situé sur la verticale FH; car la résultante de tous ces poids passe par leur centre commun de gravité, et cette résultante est dirigée suivant la verticale FH.

La résultante de tous les poids P′, P″, etc., est égale à leur somme; ainsi, en désignant cette résultante par R, on aura

$$R = P' + P'' + \text{etc.}$$

Puisque cette résultante passe par le point F, et qu'elle est égale et directement opposée à la résnltante des tensions M et N, on aura

$$R : M : N :: \sin MFN : \sin NFH : \sin MFH.$$

70. Si une corde pesante, parfaitement flexible, est attachée à deux point fixes M et N (*fig.* 39), cette corde formera une ligne courbe MLN, que l'on peut considérer comme un

polygone funiculaire d'un nombre infini de côtés, dont chaque angle est chargé d'un petit poids; la résultante de tous ces poids sera égale au poids de la corde.

Soit P le poids de la corde qui forme la courbe MLN, ou la résultante d'un nombre infini de petits poids dont cette corde est chargée; si des points M et N de cette courbe, on mène les tangentes MF, NF, et que par leur point de rencontre F, on élève la verticale FH, la résultante des poids qui agissent sur la corde passera par le sommet F de l'angle formé par les deux tangentes : si l'on désigne par M et N les tensions des parties extrêmes de la corde, ou les pressions produites sur les deux points fixes par le poids de cette corde, on aura

$$P : M : N :: \sin MFN : \sin NFH : \sin MFH;$$

d'où l'on tire

$$M = \frac{N . \sin NFH}{\sin MFH}, \quad N = \frac{M . \sin MFH}{\sin NFH}.$$

On voit, par ces rapports, que si l'angle MFH est plus grand que l'angle NFH, le point M éprouvera une pression moindre que celle qui est produite sur le point N; donc si la corde pesante MLN est attachée par l'une de ses extrémités N à une machine et que l'autre extrémité M soit tirée par une puissance P, cette puissance sera favorisée par la corde.

Si l'une des extrémités d'une corde pesante est attachée au point fixe Q (*fig.* 40), que l'autre extrémité soit tirée par une force P, suivant la ligne droite horizontale QP, cette corde formera une courbe PEQ; ayant mené les tangentes QF et PF, qui se rencontrent au point F, et la verticale FH, la tension de la corde sera exprimée par la force P; en

désignant son poids par R, on aura

$$P : R :: \sin HFQ : \sin PFQ, \quad P = \frac{R \sin HFQ}{\sin PFQ}.$$

En supposant la corde tendue en ligne droite, on aurait

$$\sin HFQ = \sin 90^\circ = 1, \quad \sin PFQ = \sin 180^\circ = 0;$$

$$P : R :: 1 : 0; \quad P = \frac{R}{0} = \infty;$$

c'est-à-dire qu'il faudrait que la force P fût infinie.

Donc, si l'une des extrémités d'une corde pesante est attachée à un point fixe, elle ne pourra pas être tendue en ligne droite par une force appliquée à l'autre extrémité, quelle que soit l'intensité de cette force.

Lorsque la longueur et le poids d'une corde attachée à un point fixe sont donnés, et qu'on connaît l'intensité du moteur, ou l'effort avec lequel cette corde est tirée suivant la direction horizontale, la longueur de la flèche qui mesure la distance entre le point le plus bas de la courbe et la ligne droite horizontale qui passe par le point fixe, peut être déterminée par le calcul.

L'angle PFQ étant double de HFQ, on a

$$\sin PFQ = 2 \sin HFQ \cos HFQ = 2\frac{FH}{FP} \sin HFQ;$$

cette valeur de sin PFQ étant substituée dans la formule précédente, il viendra

$$P = \frac{R \times FP}{2FH}.$$

Lorsque la force P est très grande par rapport au poids R de la corde, en désignant sa longueur par L, on aura approxi-

mativement

$$FP = \tfrac{1}{2}L, \quad FH = 2EH;$$

ce qui donne

$$P = \frac{R \times \frac{1}{2}L}{4EH} = \frac{R \times L}{8EH};$$

d'où l'on tire

$$EH = \frac{R \times L}{8P}.$$

C'est-à-dire que si le poids de la corde est multiplié par sa longueur, et que le produit soit divisé par huit fois la puissance, ou huit fois le poids qui exprime l'effort avec lequel la corde est tirée horizontalement, le quotient sera la mesure de la longueur de la flèche.

Les cordes sont d'un usage continuel dans la plupart des applications de la Mécanique; elles n'ajoutent cependant rien à la force d'un moteur, qui est toujours la même que s'il était appliqué immédiatement au corps sur lequel on veut le faire agir, abstraction faite des résistances que nous ferons connaître plus loin: mais les cordes fournissent les moyens souvent indispensables pour augmenter le nombre des hommes ou des chevaux qui composent le moteur, et lui donner la direction qui convient le mieux pour l'effet qu'il doit produire.

Les chaînes servent aux mêmes usages que les cordes, et elles leur sont bien supérieures; lorsqu'une chaîne est faite avec du fer de bonne qualité, qu'il a été travaillé avec tous les soins qu'exige une construction soignée, et que cette chaîne a subi l'épreuve qui constate qu'elle n'est défectueuse dans aucune de ses parties, son volume et son poids sont beaucoup moindres que ceux d'une corde d'égale longueur, qui serait capable de la même résistance, et celle-ci s'use et se

détériore promptement, par le travail et l'effet des intempéries, qui ne produisent que des dégradations peu sensibles sur la première: c'est par ces motifs, confirmés par l'expérience, qu'on a donné une grande extension à la fabrication des chaînes, et depuis environ vingt ans on s'en sert avec beaucoup d'avantage, dans un grand nombre de cas où les cordes étaient seules employées.

De la chaînette.

71. Nous terminerons cet article sur les cordes et les chaînes, par quelques notions élémentaires sur le problème de la ***chaînette,*** proposé par Jacques Bernoulli, vers la fin du dix-septième siècle; ce problème curieux et difficile était un objet très intéressant de recherches théoriques: en y appliquant l'analyse infinitésimale, avec laquelle les plus grands géomètres de cette époque commençaient à reculer les limites des sciences naturelles, ils parvinrent à découvrir les propriétés de la chaînette, parmi lesquelles il y en a plusieurs dont on a fait dans la suite des applications très importantes à des constructions dont la théorie dépend de la mécanique.

Si une corde d'une grosseur uniforme, parfaitement flexible et d'une longueur déterminée, ou une chaîne bien construite, dont les chaînons soient librement mobiles, très courts et égaux entre eux, est suspendue par ses extrémités à deux points fixes, dont la distance soit moindre que sa longueur, cette corde, ou cette chaîne, formera la courbe que l'on nomme ***caténaire*** ou ***chaînette.***

Il est facile de décrire une chaînette, lorsqu'on a déterminé la forme de cette courbe par le moyen d'une corde ou d'une chaîne parfaitement flexible, comme on vient de l'expliquer. Les deux points fixes, auxquels les extrémités de la chaîne

doivent être attachées, étant pris sur une surface plane verticale, on marquera sur cette surface, par des points peu éloignés les uns des autres, le contour de la courbe formée par la chaîne; ensuite, après avoir enlevé cette chaîne, on joindra les points par une ligne continue et régulière qui sera la courbe demandée.

72. Le moyen que nous venons d'indiquer pour tracer une chaînette, suppose que l'on ait une corde très flexible, ce qui n'a lieu que pour celles d'un petit diamètre, qui se dérangent trop facilement; une chaîne bien construite, dont la longueur soit au moins égale au contour de la courbe que l'on veut décrire, serait donc nécessaire, mais il serait difficile de se procurer une pareille chaîne, dans un grand nombre de cas où l'on aurait besoin d'en faire usage. La théorie fournit d'autres méthodes dans lesquelles cet inconvénient n'a pas lieu; celle que nous allons d'abord faire connaître n'exige que des constructions de géométrie faciles à exécuter.

Soit AB (*fig.* 41) la base de la chaînette qu'il s'agit de décrire, et HL, perpendiculaire sur le milieu de AB, sa hauteur; cette droite HL sera l'axe ou la flèche de la chaînette.

Prolongez HL, et prenez sur cette droite la distance HE égale à HA, moitié de AB; par le point L menez la droite indéfinie LV parallèle à AB; du point E comme centre, et avec le rayon EH, décrivez un arc de cercle qui coupe LV en *v*, rapportez L*v* sur LC, prolongement de l'axe HL, et par le point C menez la ligne droite RS, parallèle à AB; du point C comme centre, et avec le rayon CH, décrivez un arc de cercle, et menez le rayon CV au point où cet arc coupe LV; décrivez un autre arc du centre V et avec le rayon VL, qui coupera VC en *e*; prenez sur CL la distance C*i* = C*e*, et menez *i*K parallèle à RS: prenez aussi les distances CR et CS,

chacune égale à HA, et menez AR et BS; ces deux droites seront parallèles à la flèche HL.

La chaînette passe par les trois points A, L et B; cette courbe est composée de deux branches symétriques, de part et d'autre de l'axe LH; chacun des points de l'arc compris entre L et B correspond à un point semblablement placé sur l'autre branche LA: il reste à déterminer autant de points qu'il est nécessaire d'en avoir pour tracer cette courbe.

Partagez en deux parties égales la partie CS de l'axe horizontal RS, comprise entre les ordonnées CL, SB, du sommet L et de l'extrémité B de la chaînette; par le point de division m', menez $m'l'$ parallèle aux ordonnées; cherchez une moyenne proportionnelle entre CL et SK, cherchez ensuite une troisième proportionnelle à cette moyenne proportionnelle et à l'ordonnée CL; ajoutez cette moyenne et cette troisième proportionnelle, et prenez la moitié de leur somme que vous porterez sur $m'l'$, l'extrémité n' de cette nouvelle ordonnée sera l'un des points de la chaînette qu'il s'agit de tracer.

On trouvera de la même manière les points n'', n et s, par la bissection de la partie de l'axe horizontal comprise entre deux ordonnées; on mènera, par le point de division, une parallèle à ces ordonnées; la moitié de la somme de la moyenne proportionnelle entre les deux ordonnées connues et de la troisième proportionnelle à cette moyenne et à l'ordonnée CL du sommet, sera la longueur d'une nouvelle ordonnée, dont l'extrémité supérieure sera l'un des points de la chaînette.

Chaque ordonnée de la branche LnB de la chaînette, correspond à une ordonnée égale de l'autre branche LNA; ainsi lorsqu'on aura déterminé un nombre suffisant de points pour

tracer l'une des branches, on appliquera ces points sur la direction de l'autre branche par de simples transpositions, de l'autre côté de l'ordonnée du sommet.

73. Les formules suivantes éclairciront la règle qui vient d'être énoncée, et elles feront connaître la manière de l'appliquer.

Par le point m', milieu de CS, menez $m'l'$ parallèle à CL; la moyenne proportionnelle entre CL et SK, et la troisième proportionnelle à cette moyenne et à l'ordonnée CL, seront exprimées par les formules

$$\sqrt{\mathrm{CL} \times \mathrm{SK}} = m'p', \quad \frac{\overline{\mathrm{CL}}^2}{m'p'} = m'l';$$

la demi-somme $\frac{1}{2}(m'p' + m'l')$ des seconds membres de ces deux équations, sera la longueur de l'ordonnée $m'n'$, qui détermine le point n' de la chaînette.

L'ordonnée mn, qui partage la partie m'S de l'axe en deux parties égales, sera déterminée par les formules suivantes:

$$\sqrt{m'p' \times \mathrm{SK}} = mp, \quad \frac{\overline{\mathrm{CL}}^2}{mp} = ml;$$
$$\frac{mp + ml}{2} = mn.$$

Pour l'ordonnée qui partage Cm' en deux parties égales, on aura

$$\sqrt{\mathrm{CL} \times m'p'} = m''p'', \quad \frac{\overline{\mathrm{CL}}^2}{m''p''} = m''l'';$$
$$\frac{m''p'' + m''l''}{2} = m''n''.$$

L'ordonnée au point r, milieu de mS, sera déterminée par

les formules suivantes :

$$\sqrt{mp \times SK} = rq, \quad \frac{\overline{CL}^2}{rq} = rw;$$
$$\frac{rq + rw}{2} = rs.$$

On trouvera successivement, par le même procédé, une ordonnée intermédiaire entre deux ordonnées connues; cette règle fera connaître autant de points qu'on voudra en déterminer, pour tracer une chaînette dont la base et la hauteur, ou la flèche, seront données.

Si l'on mène une ligne continue par les extrémités des moyennes proportionnelles, dont les longueurs sont déterminées par les formules précédentes, on formera la courbe $Lp''p'q$; et si l'on joint pareillement les extrémités des troisièmes proportionnelles, on aura la ligne courbe $Ll''l'w$; ces deux courbes sont des logarithmiques, elles ont une propriété remarquable, qui consiste en ce que les parties de toutes les ordonnées comprises entre la concavité de la première et la convexité de la seconde, sont divisées en deux parties égales par la chaînette.

Les formules précédentes peuvent être construites géométriquement, avec la règle et le compas; on peut aussi évaluer les lignes droites données en nombres, d'après une unité connue, substituer les nombres que représentent ces lignes et effectuer les calculs indiqués dans les formules; on obtiendra, par cette méthode, des résultats plus exacts que ceux que l'on trouverait par des constructions géométriques.

Si l'on prend le millimètre pour unité, on aura

$$CL = 52 \text{ millimètres}, \quad SK = 16^{mm},5;$$

substituant ces nombres dans les formules, et effectuant les

calculs, on trouvera

$$\sqrt{\mathrm{CL} \times \mathrm{SK}} = \sqrt{52 \times 16{,}5} = 29{,}29,$$

$$m'p' = 29^{\mathrm{mm}},29;$$

$$\frac{\overline{\mathrm{CL}}^2}{m'p'} = \frac{\overline{52}^2}{29{,}29} = 92{,}32,$$

$$m'l' = 92^{\mathrm{mm}},32;$$

$$m'n' = \frac{m'p' + m'l'}{2} = 60^{\mathrm{mm}},8.$$

On trouvera de la même manière les valeurs numériques des résultats indiqués par les autres formules.

Mener une tangente à un point donné M *de la chaînette* ALB. — Prenez sur la droite LV, perpendiculaire à l'axe LH, une distance Lu, égale à l'arc ML compris entre le point de tangence M et le sommet L de la chaînette.

Cet arc peut être mesuré par approximation, en prenant pour unité une ligne droite assez petite pour qu'elle se confonde sensiblement avec l'arc de courbe sur lequel on l'applique; ayant pris une ouverture de compas égale à cette unité de longueur, on la porte sur la droite LV, de L en u, autant de fois qu'elle est contenue dans l'arc LM.

Par le point M, menez une parallèle à LV: cette parallèle rencontre l'axe LH au point g; joignez ug, élevez une perpendiculaire sur le milieu de cette droite, elle coupera en e' le prolongement de l'axe; menez la droite $e'u$, menez ensuite MP parallèle à l'axe LH, et faites l'angle PMT = Lue', la ligne droite TM sera la tangente demandée.

Dans les questions que nous venons de résoudre sur la chaînette, nous nous sommes bornés à une simple exposition

des méthodes pratiques que fournit la Géométrie: ces méthodes pourront suffire aux personnes qui ne se livrent à l'étude que pour acquérir la connaissance des règles qu'elles peuvent avoir besoin d'appliquer. Lorsqu'on veut approfondir davantage le sujet qui nous occupe, il faut employer le calcul différentiel; l'application que nous allons faire de ce calcul pour chercher l'équation de la chaînette, et celles que nous ferons dans la suite à quelques autres questions pour lesquelles l'algèbre élémentaire est insuffisante, donneront une idée des ressources que présente le calcul infinitésimal, pour découvrir des vérités et conduire à des résultats auxquels on parviendrait difficilement par les méthodes longues et compliquées de l'analyse géométrique.

74. Soit la chaînette AMLB (*fig.* 42), formée par une chaîne, ou une corde parfaitement flexible, dont les extrémités sont attachées aux points fixes A et B; nous supposerons que la ligne droite qui passe par ces deux points est horizontale.

Plaçons l'origine au point A, et menons la verticale AY; les deux droites rectangulaires AX, AY, seront les axes des coordonnées x et y.

Prenons, sur la chaînette, un arc quelconque $AM = s$, et menons aux extrémités de cet arc les tangentes AE, MF, qui se coupent au point D; élevons les verticales MP et DI, les coordonnées du point M seront $x = AP$ et $y = MP$.

On peut considérer l'équilibre de la portion de chaînette qui forme l'arc s, comme étant produit par deux forces dirigées suivant les tangentes menées aux extrémités A et M de cet arc, dont le poids est une force qui agit suivant la verticale ID qui passe par l'intersection des deux tangentes. Ainsi, en désignant par a la tension de la chaînette à l'origine A, et

observant que le poids de l'arc s est proportionnel à sa longueur, on aura

$$a : s :: \sin \text{IDM ou} \sin \text{IDF} : \sin \text{ADM};$$

menons la ligne droite mn parallèle à l'axe des x, le petit arc mM peut être considéré comme une ligne droite, et le triangle élémentaire Mnm donnera

$$\sin m\text{M}n = \frac{dx}{ds}, \quad \cos m\text{M}n = \frac{dy}{ds};$$

l'arc infiniment petit Mm se confond avec la tangente MF, d'où il résulte que les angles mMn et IDF sont égaux; ainsi l'on a

$$\sin \text{IDF} = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \text{IDF} = \frac{dy}{ds};$$

en substituant ces valeurs dans la proportion, il viendra

$$a : s :: \frac{dx}{ds} : \sin \text{ADM} = \frac{s}{a} \times \frac{dx}{ds}.$$

On a aussi, par les formules trigonométriques,

$$\begin{aligned} \sin \text{ADM} = \sin \text{ADF} &= \sin (\text{IDF} - \text{IDA}) \\ &= \sin \text{IDF} \cos \text{IDA} - \sin \text{IDA} \cos \text{IDF}. \end{aligned}$$

Les valeurs analytiques étant substituées dans cette formule, en observant que $\cos \text{IDA} = \sin \text{IAD} = \sin c$, on aura

$$\sin \text{ADM} = \sin c . \frac{dx}{ds} - \cos c . \frac{dy}{ds};$$

ces deux valeurs de sin ADM donnent l'équation suivante,

qui est l'équation différentielle de la chaînette :

$$sdx = a \sin c.dx - a \cos c.dy,$$

$$s = a \sin c - a \cos c.\frac{dy}{dx}.$$

Pour éliminer la variable s de cette équation, nous en prendrons la différentielle en supposant dx constant, il viendra

$$ds = -a \cos c.\frac{d^2y}{dx};$$

le triangle rectangle Mnm donne

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}:$$

de ces deux valeurs de ds on déduit une équation d'où l'on tire

$$dx = -a \cos c.\frac{d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}};$$

les deux membres de cette équation étant multipliés par dy, on aura

$$dxdy = -a \cos c.\frac{dyd^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}};$$

en intégrant, et ajoutant la constant Cdx, il vient

$$ydx = -a \cos c.\sqrt{dx^2 + dy^2} + Cdx;$$

divisant par dx, transposant la constante dans le premier membre et élevant au carré, pour faire disparaître le radical, on aura

$$\frac{(y - C)^2}{a^2 \cos^2 c} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y-C)^2 - a^2\cos^2 c}}{a\cos c}.$$

Pour déterminer la constante C, nous observerons qu'au point A, on a

$$y = 0 \text{ et } \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} c,$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} c \times a\cos c = \sqrt{C^2 - a^2\cos^2 c};$$

en élevant le premier membre au carré, supprimant le radical du second membre, et observant que $\operatorname{tang} c \cos c = \sin c$, on aura

$$a^2\sin^2 c = C^2 - a^2\cos^2 c;$$

cette équation se réduit à $C = a$, parce que $\sin^2 c + \cos^2 c = 1$.

La constante C étant remplacée par la quantité a, l'équation de la chaînette devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y-a)^2 - a^2\cos^2 a}}{a\cos c}, \quad dx = \frac{a\cos c\,dy}{\sqrt{(y-a)^2 - a^2\cos^2 c}}.$$

Il s'agit maintenant de transformer cette équation, de sorte que l'on puisse en trouver l'intégrale; on fera d'abord

$$a - y = z, \quad -dy = dz,$$

et l'on aura

$$dx = \frac{-a\cos c\,dz}{\sqrt{z^2 - a^2\cos^2 c}};$$

on fera ensuite

$$\sqrt{z^2 - a^2\cos^2 c} = z - t:$$

les deux membres de cette équation étant élevés au carré, elle

se réduit à

$$2tz = a^2\cos^2 c + t^2;$$

en prenant la différentielle de chaque membre, et négligeant le facteur commun 2, il viendra

$$tdz + zdt = tdt,$$

$$dz = -\frac{(z-t)\,dt}{t} = -\frac{\sqrt{(z^2 - a^2\cos^2 c)}\,dt}{t};$$

remettant, dans l'équation de la chaînette, cette dernière quantité à la place de dz, et supprimant le facteur commun au numérateur et au dénominateur, on aura

$$dx = \frac{a\cos c\,dt}{t},$$

et en prenant l'intégrale,

$$x = a\cos c.\log t + \mathrm{D} = a\cos c.\log\left(z - \sqrt{z^2 - a^2\cos^2 c}\right) + \mathrm{D};$$

la quantité z étant remplacée par sa valeur $a - y$, cette équation devient

$$x = a\cos c.\log\left[a - y - \sqrt{(a-y)^2 - a^2\cos^2 c}\right] + \mathrm{D};$$

on déterminera la valeur de la constante D, en observant qu'au point A, origine des coordonnées, on a $x = 0$ et $y = 0$, ce qui donne

$$\mathrm{D} = -a\cos c\log\left(a - \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 c}\right),$$

$$x = a\cos c\left\{\log\left[a - y - \sqrt{(a-y)^2 - a^2\cos^2 c}\right] - \log\left(a - \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 c}\right)\right\}.$$

Le second membre de cette équation étant la différence des

logarithmes de deux quantités, c'est le logarithme du quotient de ces quantités, qui peut s'écrire de la manière suivante:

$$x = a \cos c \log \left[\frac{a - y - \sqrt{(a-y)^2 - a^2 \cos^2 c}}{a - \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 c}} \right].$$

75. Cherchons maintenant la forme que prend l'équation de la chaînette, lorsqu'on transporte l'origine des coordonnées au point le plus bas, ou au sommet L de cette courbe.

Dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y-a)^2 - a^2 \cos^2 c}}{a \cos c},$$

le premier membre est l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'élément de la courbe avec l'axe des x; lorsque cette tangente est parallèle à l'axe des x, ce qui a lieu au sommet L, on a

$$0 = (a - y)^2 - a^2 \cos^2 c, \quad y = a - a \cos c = \text{HL}.$$

Désignons par x' les abscisses comptées sur l'axe LH, à partir du sommet L, et par y' les ordonnées perpendiculaires à cet axe, nous aurons

$$x = \text{AH} - y',$$
$$y = \text{HL} - x' = a - a \cos c - x';$$

les différentielles de ces coordonnées donnent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx'}{dy'};$$

substituons, dans l'équation précédente, les expressions des

nouvelles coordonnées, il viendra

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{\sqrt{x'^2 + 2a\cos cx'}}{a\cos c}, \quad dy' = \frac{a\cos c dx'}{\sqrt{x'^2 + 2a\cos cx'}}.$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons d'abord

$$x' + a\cos c = t, \quad x'^2 + 2a\cos cx' = t^2 - a^2\cos^2 c,$$
$$dx' = dt;$$

ce qui donne

$$dy' = \frac{a\cos c dt}{\sqrt{t^2 - a^2\cos^2 c}};$$

nous ferons ensuite

$$\sqrt{t^2 - a^2\cos^2 c} = u - t:$$

élevant les deux membres au carré, supprimant le terme commun t^2, prenant la valeur de t et différentiant, on trouvera

$$t = \frac{u^2 + a^2\cos^2 c}{2u} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}a^2\cos^2 c u^{-1},$$
$$dt = \frac{1}{2}du - \frac{1}{2}a^2\cos^2 c u^{-2} du = \frac{u^2 - a^2\cos^2 c}{2u^2}du;$$

en substituant ces dernières quantités dans la valeur précédente de dy', on aura

$$dy' = \frac{a\cos c \times \frac{u^2 - a^2\cos^2 c}{2u^2}du}{u - t};$$

en mettant la valeur de t dans cette équation, elle se réduit à

$$dy' = a\cos c\frac{du}{u},$$

dont l'intégrale

$$y' = C + a\cos c \log u = C + a\cos c \log(t + \sqrt{t^2 a^2 - \cos^2 c})$$
$$= C + a\cos c \log(x' + a\cos c + \sqrt{x'^2 + 2a\cos c x'}).$$

On déterminera la valeur de la constante C, en observant que l'origine est placée au sommet L de la courbe, et qu'à ce point les coordonnées sont nulles, c'est-à-dire qu'on a $x' = 0$ et $y' = 0$, ce qui donne

$$0 = C + a\cos c \log a\cos c,$$
$$C = -a\cos c \log a\cos c;$$

cette valeur étant substituée à la place de la constante C, il viendra

$$y' = a\cos c \log \frac{x' + a\cos c + \sqrt{x'^2 + 2a\cos c x'}}{a\cos c}.$$

C'est l'équation finie de la chaînette, rapportée à son sommet.

Le logarithme que renferme cette équation, et ceux qui sont indiqués dans les formules précédentes, sont des logarithmes hyperboliques; ce sont les seuls dont on fasse usage dans le calcul intégral; on peut les chercher directement dans une Table des logarithmes hyperboliques, ou bien se servir de la Table de logarithmes vulgaires, en multipliant les logarithmes pris dans cette Table par le nombre 2,302585, qui exprime le quotient du logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque divisé par le logarithme vulgaire de ce même nombre.

76. Pour appliquer l'équation de la chaînette à un exemple, nous allons la réduire en nombres; nous prendrons pour x' des valeurs déterminées sur l'axe LH de la courbe, et nous calculerons les valeurs correspondantes des ordonnées y'.

Soit $a = 10$ la pression exercée sur le point A (*fig.* 41), par la chaîne, ou par la corde, suivant la direction de la tangente à la courbe, menée par ce point, et $c = 60°$ l'angle compris entre cette tangente et la ligne droite horizontale AB, qui forme la base de la chaînette; on aura

$$a \cos c = 10 \times \cos 60° = 10 \times 0,5 = 5;$$

$$y' = 5 \log \frac{x' + 5 + \sqrt{x'^2 + 10x'}}{5}.$$

En faisant d'abord $x' = 1$, et effectuant les calculs indiqués, prenant le logarithme dans les Tables de logarithmes vulgaires et le multipliant par 2,302585, l'équation devient

$$y' = 5 \times 2,302585 \log 1,8633 = 3,102.$$

Si l'on mène une perpendiculaire à l'axe LH, par le point de division 1, et que l'on porte de part et d'autre de l'axe, sur cette perpendiculaire, la longueur de l'ordonnée $y' = 3,102$, les extrémités de cette double ordonnée seront deux points de la chaînette.

On trouvera, par des opérations semblables, que les ordonnées qui correspondent aux abscisses x', marquées sur l'axe de la courbe par les nombres 2, 3, 4 et 5, ont respectivement les longueurs exprimées par 4,335, 5,235, 5,964 et 6,585.

Le centre de gravité de la chaînette est situé sur l'axe LH, et il est plus bas que celui de toute autre courbe de même longueur, qui serait terminée aux mêmes points A et B.

La démonstration de cette propriété exigerait des calculs qui excèdent les limites dans lesquelles nous devons nous renfermer; nous observerons seulement que, d'après la règle

de Guldin, il en résulte que si la chaînette fait une révolution autour de sa base AB, elle engendrera une surface plus grande que celle qui serait formée par la révolution de toute autre courbe de même longueur, et terminée aux extrémités de la même base.

77. Une voûte formée de voussoirs égaux, disposés suivant la courbure d'une chaînette, se soutient elle-même en équilibre, par le seul effet du contact de ses voussoirs.

Supposons cette voûte formée par de petites sphères égales qui se touchent; joignons leurs centres par des lignes droites; imaginons ensuite que la pesanteur qui agit sur ces sphères soit dirigée en sens contraire, et que les lignes droites qui joignent leurs centres soient des fils inextensibles qui les empêchent de se séparer; l'équilibre ne sera pas détruit (**29**), et la voûte deviendra une chaînette renversée: donc la courbe de la voûte et celle de la chaînette coïncident l'une avec l'autre.

Cette démonstration pouvait laisser encore quelque chose à desirer: Rondelet en a vérifié l'exactitude par l'expérience suivante. Ayant pris 15 boules de pierre, d'un pouce de diamètre, il les a disposées sur une dalle portant un rebord par le bas, de manière que les points de contact des boules se trouvaient dans la direction d'une chaînette tracée sur la dalle; après beaucoup d'essais, et en se servant d'un cintre divisé en trois parties qui pouvaient s'enlever sans ébranler les boules, il est parvenu à former une voûte qui se soutenait en équilibre, lorsque la dalle était relevée verticalement.

Une autre application très importante de la chaînette est celle qui a été faite pour les ponts suspendus, dans lesquels cette courbe est formée soit avec des chaînes, soit avec des câbles en fil de fer, disposés sur deux rangs qui forment des

arches renversées, auxquelles on attache des tiges verticales en fer qui soutiennent le plancher. Ces ponts, qui ont été importés d'Angleterre il y a environ vingt ans, ont excité un vif intérêt; ils ont nécessité des expériences dont nous ferons connaître les principaux résultats, lorsque nous nous occuperons de la résistance du fer et des autres métaux.

78. La chaînette paraît avoir beaucoup d'analogie avec la parabole, mais les équations de ces deux courbes font connaître qu'elles ne passent pas par les mêmes points; nous allons chercher jusqu'à quel degré elles peuvent se rapprocher l'une de l'autre.

On sait que la parabole a pour équation

$$y^2 = px;$$

si l'on fait $p = 2a \cos c = 10$, on aura

$$y^2 = 10x, \quad y = \pm\sqrt{10x};$$

en prenant successivement pour les abscisses x les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 (*fig.* 41), et extrayant les racines carrées, on trouvera que les valeurs de y, ou les ordonnées correspondantes, sont exprimées par 3,162, 4,472, 5,477, 6,324 et 7,071. Si l'on fait passer une courbe par les extrémités de ces ordonnées, on aura la parabole aLb, qui enveloppe la chaînette avec laquelle elle coïncide vers le sommet L, et qui s'en écarte à mesure que les branches sont prolongées à une plus grande distance.

Du levier.

79. On appelle levier une barre inflexible BC (*fig.* 43) placée sur un axe ou sur un point fixe A, sans pouvoir glisser; ce levier est sollicité par des forces P, Q, dont les actions tendent à le faire tourner autour de l'axe, ou du point fixe.

Le point fixe sur lequel le levier est placé se nomme *point d'appui;* ce point divise le levier en deux parties qu'on appelle les *bras* du levier.

Nous considérerons d'abord le levier comme s'il n'avait aucune pesanteur, et nous supposerons que le frottement soit sans influence pour l'empêcher de tourner autour du point d'appui; nous ferons connaître ensuite comment on peut faire entrer le poids du levier dans les conditions d'équilibre, et nous nous occuperons du frottement dans les parties suivantes de cet ouvrage.

Il pourrait y avoir un nombre quelconque de puissances appliquées à un levier; mais, pour rendre la théorie de cette machine claire et facile à concevoir, nous commencerons par le cas le plus simple, qui est celui où il n'y a que deux puissances, dont l'une est une résistance que l'on se propose de vaincre, ou un poids que l'on veut élever, et l'autre est une force qui tend à vaincre la résistance, ou à élever le poids par le moyen du levier.

Lorsqu'il s'agit de vaincre une résistance ou d'élever un poids, en faisant usage d'un levier, la force qui doit produire cet effet aura plus ou moins d'avantage, suivant la manière dont elle sera placée, par rapport au point d'appui; or la force, la résistance et le point d'appui, peuvent être arrangés

de trois manières, et, d'après ces dispositions ou arrangements, on distingue trois espèces de leviers. Voici cette classification qu'il est utile de connaître, mais elle ne produit aucun changement dans les conditions d'équilibre.

Un levier se nomme levier de la première espèce, ou du premier genre, lorsque le point d'appui est situé entre la force et la résistance (*fig.* 43);

Un levier du second genre est celui dans lequel le poids, ou la résistance, est situé entre la force et le point d'appui (*fig.* 44);

Un levier est dit être du troisième genre, lorsque la force, ou la puissance, est située entre la résistance et le point d'appui (*fig.* 45).

80. *Trouver les conditions d'équilibre du levier.* — Soient les forces P, Q, appliquées au levier BAC, soutenu par le point d'appui A (*fig.* 43); lorsque le levier est en équilibre, la résultante des forces P, Q, est détruite par le point d'appui A, qui doit, par conséquent, se trouver sur la direction de cette résultante.

Prolongez les directions PB, QC, des forces P et Q, jusqu'à leur rencontre au point D, joignez DA; les forces P et Q peuvent être appliquées au point D, et leur résultante sera dirigée suivant DA, puisque cette résultante doit être détruite par la résistance du point d'appui A. Soit DG la ligne droite qui représente la résistance ou le poids Q; c'est-à-dire que le rapport de la ligne droite DG à l'unité linéaire est le même que le rapport du poids Q à l'unité de poids. Par le point G menez GF parallèle à DB, et par le point F, où cette parallèle coupe DA, menez FE parallèle à DG; la résultante des forces P et Q sera représentée par la diagonale DF du parallélogramme DEFG: par conséquent la diagonale DF

exprime l'action des forces P et Q sur le levier, ou la pression produite par ces forces sur le point d'appui A. Donc si deux forces appliquées à un levier sont en équilibre, les directions de ces forces et le point d'appui du levier seront dans un même plan, et la résultante des deux forces sera détruite par la résistance du point d'appui du levier.

Les deux forces P, Q, et leur résultante R, sont représentées par les trois côtés DE, EF, FD, du triangle DEF, et ces côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés; ainsi l'on a

$$P : Q : R :: DE : EF \text{ ou } DG : DF$$
$$:: \sin FDG : \sin FDE : \sin EDG;$$

c'est-à-dire que chacune des forces peut être exprimée par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres, comme nous l'avons déjà démontré dans le chap. Ier.

Il est facile de prouver que la même démonstration s'applique aux trois espèces de leviers.

Dans la recherche des conditions nécessaires pour l'équilibre du levier, il y a six choses à considérer, savoir : les deux forces P, Q, appliquées au levier, les directions de ces forces; leur résultante et sa direction, qui doit passer par le point d'appui, car si elle passait par un autre point, elle ferait tourner le levier autour du point d'appui, et l'équilibre n'existerait pas. Lorsque trois de ces quantités seront connues, on pourra trouver les trois autres par les règles de la Trigonométrie; mais, parmi les quantités connues, il faut qu'il y ait au moins une force, car si l'on ne connaissait que les trois directions des forces, on ne pourrait pas en déduire les valeurs de ces forces, on obtiendrait seulement leurs rapports.

Si l'on veut connaître la charge ou la pression que les forces

produisent sur le point d'appui, on prendra la valeur de la résultante R, et les autres quantités proportionnelles étant connues, on aura

$$R = \frac{P, \sin EDG}{\sin FDG} = \frac{Q, \sin EDG}{\sin FDE}.$$

On voit que si les forces P, Q, sont égales, l'angle FDG sera égal à l'angle FDE; c'est-à-dire que la résultaute partagera l'angle formé par les directions des forces en deux parties égales : si la force $P > Q$, l'angle FDG sera plus grand que l'angle FDE. En général, la résultante de deux forces inégales partage l'angle de ces forces en deux parties inégales, et le plus petit de ces angles est celui que la résultante forme avec la plus grande force.

81. Les conditions d'équilibre entre deux forces appliquées à un levier, peuvent aussi se déduire d'une manière très simple du théorème des moments: en effet, supposons, comme dans l'article précédent, que les directions des forces et le point d'appui du levier soient dans le même plan. Les deux forces P et Q étant appliquées au levier BAC, placé sur le point d'appui A, autour duquel ces forces tendent à le faire tourner, l'équilibre n'aura lieu que dans le cas où leur résultante passera par le point d'appui.

Le point d'appui A étant sur la direction de la résultante des forces P et Q, si l'on mène les lignes droites AL, AM, respectivement perpendiculaires à leurs directions BP, CQ, prolongées s'il est nécessaire, on aura la proportion

$$P : Q :: AM : AL \ (\mathbf{21});$$

d'où l'on tire $$P \times AL = Q \times AM.$$

C'est-à-dire que si deux puissances appliquées à un levier

sont en équilibre, les moments de ces deux puissances, par rapport au point d'appui, seront égaux.

82. Une force produira toujours le même effet, quel que soit le point de sa directiou où elle soit appliquée : donc si les lignes droites LA, AM, perpendiculaires aux directions des forces P et Q, forment une verge angulaire inflexible LAM, et que les forces P, Q, soient appliquées aux points L et M, le levier courbe BAC pourra être remplacé par le levier angulaire LAM; ainsi, à la place d'un levier courbe quelconque, on pourra toujours substitner un levier angulaire, dont les bras seront des verges, ou des tiges droites, perpendiculaires aux directions des forces.

Lorsque le levier est seulement posé sur la surface de l'appui, et qu'il a la liberté de glisser sur cette surface, la condition que la résultante des forces P et Q, appliquées au levier, passe par le point de contact du levier et de l'appui, ne suffit pas pour établir l'équilibre; il faut encore que cette résultante soit dirigée suivant une droite perpendiculaire à la surface de l'appui; car, si la direction de la résultante des forces P et Q formait des angles inégaux avec la surface de l'appui, comme on suppose qu'il n'y a, par hypothèse, aucun frottement, le levier glisserait du côté du plus grand de ces angles;. c'est ce qui sera démontré plus loin, lorsque nous nous occuperons du plan incliné.

Si le levier est traversé par un axe fixe, autour duquel il puisse tourner librement, lorsqu'il n'est pas en équilibre, il suffit, pour que l'équilibre existe, que la résultante des forces appliquées au levier passe par le point d'appui; elle sera détruite par ce point, quelle que soit sa direction.

Il pourrait y avoir plus de deux puissances appliquées à un levier; alors il faudrait, pour rendre l'équilibre possible,

que toutes ces puissances se réduisissent à une seule résultante, dont la direction devrait passer par le point d'appui du levier.

Dans tous les cas, pour que l'équilibre puisse exister entre les forces appliquées à un levier, il faut que son point d'appui oppose à ces forces une résistance plus grande, ou au moins égale à la pression que produit leur résultante.

83. Nous avons considéré jusqu'ici le levier comme une verge, ou une barre inflexible, d'une forme quelconque; si le levier est droit (*fig.* 46) et que les directions de la puissance P et de la résistance Q soient parallèles, alors les perpendiculaires AL, AM, menées du point d'appui A aux directions BP, CQ, de la puissance et de la résistance, prolongées s'il est nécessaire, seront en ligne droite, et les triangles rectangles ALB, AMC, seront semblables; par conséquent on aura

$$P : Q :: AM : AL :: AC : AB.$$

Le même raisonnement s'applique aux *figures* 47 et 48, ce qui fait voir que cette proportion a lieu dans les trois espèces de levier, c'est-à-dire que les forces P, Q, sont en raison inverse de leurs bras de levier, ou que la force P est au poids Q comme le bras de levier du poids est à celui de la force.

Dans le levier de la première espèce, la puissance et la résistance sont deux forces parallèles qui agissent dans le même sens; ces deux forces produisent une pression ou une charge, sur le point d'appui, égale à leur résultante ou à leur somme.

La grandeur de la force P, capable d'élever un poids donné

Q, par le moyen d'un levier de la première espèce, dépend de la position du point d'appui, ou de la grandeur du bras de levier de la force, par rapport à celui du poids; si le point d'appui est au milieu du levier, ou si les bras de levier sont égaux, l'équilibre aura lieu lorsque la force sera égale au poids; mais si les bras de levier sont inégaux, alors, pour établir l'équilibre, la force devra être plus petite ou plus grande que le poids, suivant que le bras de levier de la puissance sera plus grand ou plus petit que celui du poids.

Dans le levier de la seconde espèce (*fig.* 47), la puissance et la résistance sont dirigées en sens contraire, et ces deux forces étant parallèles, leur résultante, ou la charge du point d'appui, sera égale à leur différence. Le bras de levier AB de la puissance est plus grand que le bras AC de la résistance; par conséquent, la puissance P capable de mettre le poids Q en équilibre, par le moyen d'un levier de la seconde espèce, sera toujours moindre que ce poids.

Dans le levier de la troisième espèce (*fig.* 48), la résultante des deux puissances, ou la charge du point d'appui, est égale à la différence de la puissance P et de la résistance, ou du poids Q; mais le bras AB de la puissance étant plus petit que le bras AC de la résistance, l'équilibre ne peut avoir lieu que lorsque la puissance P est plus grande que le poids Q, dont se compose la résistance.

Enfin, dans les trois espèces de levier, la puissance et la résistance tendent toujours à faire tourner le levier en sens contraire, autour du point d'appui; et si l'appui d'un levier droit ne faisait que toucher sa surface, l'équilibre n'existerait que dans le cas où la direction de la résultante des forces appliquées au levier serait perpendiculaire à sa surface.

Lorsque l'appui est un axe fixe qui traverse le levier, l'é-

quilibre peut exister quelle que soit la direction de la résultante des forces; il suffit que cette résultante passe par le point d'appui, et que la résistance de ce point soit assez grande pour ne pas céder à la pression qu'éprouve le levier.

84. Si l'on veut faire entrer le poids du levier dans les conditions d'équilibre, alors ce poids peut être considéré comme une force appliquée au centre de gravité du levier: on peut aussi supposer que le poids de chaque bras de levier soit appliqué à son centre de gravité; dans ce cas il y aura quatre forces appliquées au levier, et si l'équilibre existe, la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, autour du point d'appui, sera égale à la somme des moments de celles qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé.

Lorsque le levier est un cylindre, ou un prisme homogène, la position de son centre de gravité est au milieu de son axe; il en sera de même pour les centres de gravité de chaque bras de levier.

En faisant entrer le poids du levier dans les conditions d'équilibre des trois espèces de levier, on aura les équations suivantes :

$$P \times AB + \text{poids } AB \times \tfrac{1}{2} AB = Q \times AC + \text{poids } AC \times \tfrac{1}{2} AC,$$

dans le levier de la première espèce;

$$P \times AB = Q \times AC + \text{poids } AB \times \tfrac{1}{2} AB,$$

dans le levier de la seconde espèce;

$$P \times AB = Q \times AC + \text{poids } AC \times \tfrac{1}{2} AC,$$

dans le levier de la troisième espèce.

Pour exprimer ces formules algébriquement, nous ferons

le bras de la puissance P, $AB = p$;
le bras de la résistance, ou du poids Q, $AC = q$;
le poids de l'unité de longueur du levier $= m$.

Ces valeurs étant substituées dans les formules, il viendra

$$Pp + \tfrac{1}{2}mp^2 = Qq + \tfrac{1}{2}mq^2;$$
$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2}mp^2;$$
$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2}mq^2.$$

85. On pourra résondre, par le moyen de ces trois équations, les différents problèmes relatifs au levier droit, lorsque ce levier est sollicité par deux forces parallèles, ou par une force dont la direction est parallèle à celle de la résistance qu'il s'agit de vaincre, ou du poids qu'il faut élever. Nous allons en faire l'application à quelques exemples.

PREMIER EXEMPLE.

Étant donnés :

la longueur l d'un levier de la première espèce;
les forces parallèles P *et* Q, *qui doivent être appliquées à ce levier;*
et le poids m d'une unité de longueur du levier;

trouver le point A, *où l'appui doit être appliqué pour établir l'équilibre.*

On a l'équation

$$Pp + \tfrac{1}{2}mp^2 = Qq + \tfrac{1}{2}mq^2, \quad Pp = Qq - \tfrac{1}{2}m(p^2 - q^2).$$

Le levier étant une barre homogène, cylindrique ou prismatique (*fig.* 49), son centre de gravité G sera au milieu de cette barre.

Désignons par x la distance GA du centre de gravité au point d'appui : en observant que le centre de gravité G est au milieu du levier, on aura

$$x = p - \tfrac{1}{2}l, \quad p = \tfrac{1}{2}l + x,$$
$$x = \tfrac{1}{2}l - q, \quad q = \tfrac{1}{2}l - x,$$
$$p^2 - q^2 = \left(\tfrac{1}{2}l + x\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}l - x\right)^2 = 2lx;$$

les valeurs de p et q étant substituées dans l'équation précédente, il viendra

$$P\left(\tfrac{1}{2}l + x\right) = Q\left(\tfrac{1}{2}l - x\right) - lmx.$$

En effectuant les calculs indiqués, et prenant la valeur de x, on aura

$$x = \frac{\tfrac{1}{2}l(Q - P)}{P + Q + lm}.$$

La valeur de x étant substituée dans l'équation qui renferme l'expression du bras de levier q, cette équation devient

$$q = \tfrac{1}{2}l - \frac{\tfrac{1}{2}l(Q - P)}{P + Q + lm} = \frac{\tfrac{1}{2}l(lm + 2P)}{P + Q + lm}.$$

Cherchons la valeur numérique du bras de levier désigné par q, en supposant les valeurs suivantes pour les quantités données:

$l = 1$ mètre; $m = 1,5$ kilogramme;
P = 3 kilogrammes; Q = 32 kilogrammes.

Ces nombres étant substitués à la place des lettres, dans l'équation précédente, on aura

$$q = \frac{0,5(1,5+6)}{3+32+1,5} = 0^{m},1027.$$

C'est-à-dire que si la longueur du levier est de 1 mètre, et que le poids de l'unité de longueur, qui est dans cet exemple le poids du levier, soit de $1\frac{1}{2}$ kilogramme, en plaçant le point d'appui à $0^{m},1027$ du point d'application d'un poids de 32 kilogrammes, un poids de 3 kilogrammes, placé à l'autre extrémité du levier, établira l'équilibre.

En négligeant la pesanteur du levier, on aurait

$$q = \frac{lP}{P+Q} = \frac{3}{35} = 0^{m},0857.$$

86. Lorsqu'il s'agit de mettre deux poids en équilibre, par le moyen d'un levier pesant de la première espèce, le poids que l'on considère comme la puissance, diminue à mesure que son bras de levier augmente; et si l'on pouvait donner une longueur suffisante au bras de levier, son poids seul suffirait pour mettre en équilibre le poids qui forme la résistance, et qui est appliqué à l'autre extrémité du levier.

Pour trouver la longueur d'un bras de levier capable de faire équilibre à un poids donné, nous reprendrons l'équation

$$Pp + \tfrac{1}{2}mp^2 = Qq + \tfrac{1}{2}mq^2;$$

en faisant $P = 0$, et prenant la valeur de p, il viendra

$$p = \sqrt{\frac{Qq + \frac{1}{2}mq^2}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2Qq}{m} + q^2} = \sqrt{q\left(\frac{2Q}{m} + q\right)}.$$

Si l'on fait

$$Q = 32 \text{ kilog.}, \quad m = 1,5 \text{ kilog.}, \quad q = 0^{m},06,$$

on aura

$$p = \sqrt{0,06\left(\frac{64}{1,5} + 0,06\right)} = \sqrt{2,5636} = 1^{m},601.$$

Il est facile de vérifier si la valeur de p que nous venons de trouver satisfait aux conditions d'équilibre. Calculons d'abord le moment de ce bras de levier ; nous aurons

$$\tfrac{1}{2}mp^2 = \frac{1,5}{2} \times 2,5636 = 1,9227.$$

En substituant les valeurs des lettres dans le second membre de l'équation, il viendra

$$Qq + \tfrac{1}{2}mq^2 = q\left(Q + \tfrac{1}{2}mq\right) = 0,06(32 + 0,75 \times 0,06)$$
$$= 1,9227.$$

Le moment du bras de levier p est égal à la somme des moments de la résistance Q, et du bras de levier q de cette résistance, ou de ce poids, et par conséquent le levier est en équilibre.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Étant donnés dans un levier droit de la seconde espèce :
la longueur AB $= p$ *du bras de levier de la puissance* (*fig.* 50) ;
le poids m de l'unité de longueur du levier ;
la résistance, ou le poids Q, *appliqué au point C du levier ;*
et le bras de levier AC $= q$ *de cette résistance ;*

trouver la force, ou la puissance P, *qu'il faut appliquer à l'extrémité* B *du levier, suivant une direction parallèle à celle du poids* Q, *pour établir l'équilibre.*

Les conditions d'équilibre, dans le levier de la seconde espèce, sont exprimées par l'équation

$$Pp = Qq + \frac{1}{2}mp^2;$$

en prenant la valeur de P, on aura

$$P = \frac{Qq + \frac{1}{2}mp^2}{p} = \frac{Qq}{p} + \frac{1}{2}mp.$$

Pour appliquer cette formule à un cas particulier, nous supposerons

$$AB = p = 1 \text{ mètre};$$
$$m = 1\tfrac{1}{2} \text{ kilogramme};$$
$$Q = 50 \text{ kilog.};$$
$$AC = q = 0{,}^{m}3.$$

Ces valeurs étant substituées à la place des lettres, dans la formule algébrique, on aura

$$P = \frac{50 \times 0{,}3}{1} + \frac{1}{2} \times 1{,}5 \times 1 = 15 + 0{,}75 = 15{,}75.$$

La puissance, ou la force demandée, est équivalente à un poids de 15,75 kilogrammes.

TROISIÈME EXEMPLE.

87. *Trouver la longueur qu'il faut donner au bras de levier* AB (*fig.* 50), *pour mettre en équilibre une force ou une*

puissance donnée P, *et un poids donné* Q, *par le moyen d'un levier de la seconde espèce.*

La solution de ce problème est comprise dans l'équation

$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2} mp^2,$$

dans laquelle p est l'inconnue; en ordonnant par rapport aux puissances de p, et divisant par $\frac{1}{2}m$, cette équation devient

$$p^2 - \frac{2P}{m}p = -\frac{2Qq}{m},$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{P}{m} \pm \sqrt{\frac{P^2}{m^2} - \frac{2Qq}{m}} = \frac{P}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{P^2 - 2mQq}.$$

Si l'on donne aux lettres qui représentent des quantités connues les mêmes valeurs que dans le dernier exemple, savoir,

$$P = 15^k,75, \quad Q = 50^k, \quad m = 1^k,5, \quad q = 0^m,3,$$

on aura

$$p = \frac{15,75}{1,5} \pm \frac{1}{1,5}\sqrt{\overline{15,75}^2 - 2 \times 1,5 \times 50 \times 0,3}$$
$$= \frac{15,75 \pm 14,25}{1,5} = 10,5 \pm 9,5;$$
$$p = 10,5 + 9,5 = 20; \quad p = 10,5 - 9,5 = 1.$$

L'équation donne, indépendamment de la valeur de $p = 1$ mètre, que nous avions supposée dans l'exemple précédent, une autre valeur de $p = 20$ mètres: cherchons la valeur de la puissance P, en supposant que ce dernier nombre

exprime la longueur de son bras de levier; les autres quantités restant les mêmes, nous aurons

$$P = \frac{50 \times 0,3}{20} + \frac{1}{2} \times 1,5 \times 20 = \frac{15}{20} + 15 = 15,75.$$

Nous retrouvons la même valeur de $15^k,75$ pour la puissance, ou la force P; donc si cette force est appliquée à un levier de la seconde espèce, à 1 mètre de la distance du point d'appui, ou bien à 20 mètres de distance du même point, elle fera équilibre à un poids de 50 kilogrammes, appliqué au levier, à $0^m,3$ du point d'appui.

En prenant la longueur du bras de levier p, plus grande que 20 mètres, par exemple, en faisant $p = 25$ mètres, on trouverait $P = 19^k,35$; ainsi la résistance étant la même, la valeur de la force P, appliquée à une distance de 25 mètres du point d'appui, doit être plus grande que celle qui serait appliquée à 20 mètres de distance du même point.

88. Parmi toutes les valeurs de p, il y en a une pour laquelle la force P, qui doit mettre le poids Q en équilibre, sera la plus petite possible; on peut trouver de la manière suivante cette valeur de p, ou la longueur du levier qui correspond au *minimum* de force.

D'après l'équation du problème, on a

$$P = \frac{Qq}{p} + \frac{1}{2}mp = Qqp^{-1} + \frac{1}{2}mp;$$

différenciant cette valeur de P, dans laquelle p est la seule quantité variable, et égalant la différentielle à zéro, il viendra

$$-Qqp^{-2}dp + \frac{1}{2}mdp = 0;$$

après avoir supprimé dp, on trouve

$$p = \sqrt{\frac{Qq}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2Qq}{m}}.$$

En substituant, à la place des lettres que renferme cette formule, les nombres indiqués dans le dernier exemple, on trouvera la longueur du levier

$$p = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 0,3}{1,5}} = \sqrt{20} = 4^{m},472.$$

La substitution de la valeur de p, dans l'équation du problème, donnera la formule suivante

$$P = \sqrt{2mQq},$$

par laquelle on trouvera

$$P = \sqrt{2 \times 1,5 \times 50 \times 0,3} = \sqrt{45} = 6^{k},708:$$

c'est la valeur de la force qui doit être appliquée à l'extrémité du levier dont nous venons de calculer la longueur; les autres quantités restant les mêmes, si l'on augmentait la longueur du levier, il faudrait une force plus grande que celle qui est exprimée par $6^{k},708$ pour mettre ce système en équilibre.

89. Le levier de la seconde espèce devient un levier de la troisième espèce, lorsqu'on change l'ordre de la puissance et de la résistance, en mettant l'une de ces forces à la place de l'autre. Pour que l'équilibre ait lieu, il faut en général que les forces soient en raison inverse de leurs bras de levier; d'où il résulte que, dans le levier de la troisième espèce, la

puissance doit être plus grande que la résistance, parce que la longueur du bras de levier de la seconde force est plus grande que celle de la première. Ce levier n'est donc pas convenable lorsqu'on veut économiser la force : mais il ne s'agit pas toujours de produire le plus grand effet avec la plus petite force possible, et il y a des cas assez nombreux où l'application du levier de la troisième espèce devient nécessaire. On en voit des exemples dans la roue du rémouleur, le rouet de la fileuse et le métier à tisser; les pédales qui servent à communiquer à ces machines le mouvement qui doit les faire marcher, sont des leviers de la troisième espèce; la résistance de ces leviers est assez faible pour que l'ouvrier appliqué à la machine puisse, sans éprouver trop de fatigue, exercer avec ses pieds une pression suffisante pour la vaincre, et travailler en même temps avec ses mains pour diriger l'ouvrage qui doit être exécuté.

Il n'y a point de machine dont l'usage soit aussi fréquent que celui du levier; il entre dans la construction de presque toutes les machines composées, dont il forme souvent une ou plusieurs des pièces les plus essentielles. Dans un grand nombre de travaux, le levier du premier genre est employé seul, ou avec des accessoires très simples, pour soulever et renverser des pierres d'un grand volume, aiusi que d'autres corps très lourds, qui ne seraient pas ébranlés par l'effort de tous les hommes qui pourraient y appliquer directement leurs forces; ce levier sert, en général, pour augmenter l'effet des forces dont on peut disposer, afin de les rendre capables de surmonter des résistances, ou des obstacles qui leur sont supérieurs.

Instruments pour peser les corps.

90. C'est sur le principe du levier que sont établis presque tous les instruments qui servent à peser les corps; nous allons donner quelques détails sur la théorie de ces instruments et sur les règles d'après lesquelles on peut connaître si, dans les résultats qu'ils donnent, les erreurs occasionnées par des vices de construction n'excèdent pas celles qui peuvent être tolérées.

La pesanteur est une force qui agit continuellement sur les corps, pour les pousser ou les tirer vers le centre de la Terre; l'expérience prouve que cette force agit avec une égale intensité sur chacune des particules matérielles de la masse d'un corps, car si avec une machine pneumatique, ou par d'autres moyens, on fait sortir l'air que renferme un tube de verre, et qu'on y fasse ensuite tomber deux corps différents, tels qu'un morceau de métal et un brin de duvet, ou un autre corps dont la densité soit très petite, la pesanteur qui agit sur ces corps n'éprouvant aucune résistance, elle les fera tomber l'un et l'autre avec la même vitesse: il n'en serait pas de même si la chute de ces corps avait lieu dans l'air atmosphérique: on verrait le morceau de métal tomber verticalement avec une vitesse accélérée un peu moindre que celle qu'il avait dans le vide, mais on n'en distinguerait pas la différence; quant au corps léger, sa vitesse serait sensiblement ralentie par la résistance de l'air.

Chaque particule matérielle d'un corps est soumise à l'action de la pesanteur; la résultante de toutes ces actions, ou de toutes ces forces partielles, qui sont égales entre elles, et dont les directions sont parallèles, se nomme le *poids* de ce

corps: c'est une force dont la grandeur dépend de la densité du corps et de son volume. Pour mesurer cette force, ou ce poids, il faut le peser, ou le mettre en équilibre avec des poids connus: on se sert, pour cette opération, de l'un des instruments que nous allons décrire.

De la balance.

91. La balance (*fig.* 51) est un instrument dont le levier BC, de la première espèce, forme la principale partie; ce levier s'appelle le *fléau* de la balance, il est traversé perpendiculairement par un axe A, en acier trempé, qui le divise en deux parties qu'on nomme les bras du fléau ou de la balance, et que l'on cherche à rendre semblables en leur donnant des longueurs égales, des formes pareilles, des volumes et des poids égaux; les parties saillantes de l'axe, qu'on nomme les couteaux, sont taillées en prismes triangulaires dont les sommets ou les tranchants sont en bas; ils doivent être plus ou moins aigus, suivant le degré de sensibilité qu'on veut donner à la balance, mais il faut qu'ils aient assez de force pour ne pas s'ébrècher sous la charge qu'ils doivent supporter.

Pour indiquer la sensibilité et l'équilibre de la balance, on a ajusté au-dessus de l'axe une aiguille AE qui est perpendiculaire à cet axe et au fléau.

La monture du fléau, qui se nomme la châsse ou la chape, est fixée par une vis sur le sommet L de la colonne IL, perpendiculaire au support MN, que l'on pose sur une table; il est nécessaire que l'appareil soit invariablement fixé, lorsqu'on fait usage de la balance, et que l'axe de la colonne soit dans la verticale qui passe par le centre de gravité du fléau. Cette châsse est composée de deux branches parallèles qui

sont percées, perpendiculairement à leurs surfaces, de deux trous qui se correspondent et qui sont à une hauteur convenable pour ne pas gêner les oscillations du fléau; la partie inférieure de chaque trou est garnie d'un coussinet en acier trempé.

Lorsque le fléau est placé dans la chape, les couteaux sont posés sur les coussinets; alors, le fléau pouvant tourner librement, il fait une suite d'oscillations qui vont en décroissant, et dont l'aiguille AE marque l'étendue, par le moyen d'un arc de cercle tracé à l'extrémité supérieure de la plus grande branche de la châsse, avec une division de parties égales. Les oscillations ayant cessé, les deux bras du fléau sont en équilibre; sa direction est horizontale, et son aiguille correspond au zéro de la division.

On peut donner au fléau d'une balance des formes très variées, mais il y a des conditions indépendantes de ces formes qui doivent être remplies: il faut d'abord qu'avec un volume qui ne renferme point de matière superflue, il ait une force suffisante pour que la charge qu'il aura à supporter ne lui fasse éprouver aucune flexion.

Si l'on incline le fléau BC, et qu'on l'abandonne ainsi à l'action de la pesanteur, il doit prendre un mouvement d'oscillation qui continuera en décroissant, jusqu'à ce que ce fléau ait repris la position horizontale; pour que cette condition soit remplie, il est nécessaire que le centre de gravité G du fléau soit à une petite distance au-dessous des couteaux, car s'il était sur la ligne droite qui joint les tranchants des couteaux, l'équilibre subsisterait encore après qu'on aurait incliné le fléau, et par conséquent il n'y aurait point de mouvement d'oscillation; si le centre de gravité était au-dessus de la ligne de contact, le plus petit mouvement communi-

qué au fléau suffirait pour le faire tomber sans qu'il puisse, par son propre poids, revenir à l'état d'équilibre dont il aurait été dérangé.

Les extrémités B et C du fléau sont disposées pour recevoir les crochets par lesquels on suspend les deux bassins P et Q, semblables entre eux et de même poids, qui complètent la balance; elle doit être ajustée de manière que les points de suspension des bassins et les tranchants des couteaux soient sur une même ligne droite.

Cette balance est en équilibre par son propre poids; si l'on met dans l'un de ses bassins, par exemple dans le bassin Q, un corps qui n'excède pas l'un de ceux qu'elle peut peser, et que l'on mette dans l'autre bassin P des poids connus pour rétablir l'équilibre, le nombre entier ou fractionnaire, qui exprime la quantité de ces poids, sera égal au poids du corps placé dans le bassin Q.

On connaîtra la sensibilité de la balance, en mettant dans l'un de ses bassins le plus petit poids qui puisse la faire sensiblement pencher; de sorte qu'à la suite de ses oscillations l'aiguille ne puisse pas être ramenée au zéro de la division : par exemple, après avoir chargé chaque bassin de 3 kilogrammes, il suffit de mettre 1 décigramme dans l'un des bassins pour détruire l'équilibre; d'où il résulte que la balance est sensible à $\frac{1}{30\,000}$ du poids contenu dans l'un de ses bassins.

92. Les deux bras d'une balance ne sont pas parfaitement égaux; tout ce que peut faire un habile artiste, c'est de rendre l'inégalité très petite, sans pouvoir parvenir à la faire entièrement disparaître; d'ailleurs, lorsqu'on a besoin de faire des pesées pour des expériences qui exigent une grande exacti-

tude, on peut éviter les erreurs qui seraient occasionnées par l'inégalité des bras de la balance.

Après avoir pesé un corps placé dans le bassin Q de la balance, changez l'ordre de la pesée, en mettant ce corps dans l'autre bassin P et les poids connus dans le bassin Q; si la longueur du bras de fléau AC est plus grande que celle de l'autre bras AB, le poids du corps sera moindre que la somme des poids connus de la première pesée, et par conséquent il faudra retrancher une partie de ces poids pour établir l'équilibre de la seconde pesée: avec les résultats de cette double pesée, on pourra calculer le poids du corps de la manière suivante.

Soient N et N′ les poids connus qui ont mis le corps en équilibre dans les deux pesées; en désignant par M le poids de ce corps, on aura, d'après le principe du levier (83),

$$M : N :: AB : AC,$$
$$N' : M :: AB : AC;$$

ces deux proportions ayant un rapport commun, les deux autres rapports donnent

$$M : N :: N' : M, \quad M = \sqrt{N \times N'}.$$

C'est-à-dire que pour avoir le poids M du corps qui a été pesé successivement dans les deux bassins de la balance, il faut multiplier le poids connu de la première pesée par celui de la seconde, et extraire la racine carrée du produit.

La méthode suivante est préférable à celle qui vient d'être expliquée, parce qu'elle donne des résultats aussi exacts, sans exiger aucun calcul.

On met d'abord le corps que l'on veut peser en équilibre,

dans l'un des bassins de la balance, avec des poids quelconques placés dans l'autre bassin ; ensuite on retire ce corps, et on le remplace par des poids connus avec lesquels on rétablit l'équilibre : ces poids sont égaux au poids du corps qui avait été mis en équilibre dans la première pesée.

93. Dans un grand nombre d'expériences, on a besoin de peser un corps dans l'eau ; on remplace alors le bassin Q par le petit bassin Q′ (*fig.* 52), qui porte un crochet à son centre : par cette disposition, la balance ordinaire devient une *balance hydrostatique ;* pour la mettre en équilibre, il suffit de charger le petit bassin Q′ avec une quantité suffisante de poids, ou de corps pesants quelconques, pour ramener le fléau dans la position horizontale.

Le corps que l'on veut peser peut être suspendu à un crin que l'on attache au crochet du plateau Q′, et l'on fait plonger ce corps dans un vase rempli d'eau, que l'on place sous le bassin Q′, dans lequel on met les poids nécessaires pour rétablir l'équilibre.

94. Pour les pesées journalières des matières employées dans les ateliers d'industrie et des marchandises qui se vendent au poids, on se sert de balances avec lesquelles on obtient à peu près le degré de précision auquel on peut s'arrêter, sans qu'il en résulte d'erreurs dont la somme puisse influer sensiblement sur le résultat : on n'est pas dans l'usage de se servir, pour ces opérations usuelles, de la méthode des doubles pesées, qui garantit des erreurs occasionnées par l'inégalité des bras de la balance, parce que cette méthode exigerait trop de temps. Ainsi il est nécessaire que les couteaux, par lesquels le fléau est suspendu, soient placés sensiblement au milieu de sa longueur ; si cette condition n'était pas satisfaite, la balance serait fausse. On peut facilement vé-

rifier si une balance est affectée de ce défaut; lorsqu'elle est en équilibre, sans autre charge que ses bassins, il suffit de les changer de place, en mettant à gauche celui qui était à droite, et réciproquement; l'équilibre sera détruit par cette simple transposition, si les deux bras du fléau ne sont pas de même longueur.

On peut aussi vérifier la justesse d'une balance en changeant de bassin les poids qui se font équilibre; cette transposition détruira l'équilibre, si les bras de la balance sont sensiblement inégaux.

95. Les grandes balances ont des plateaux carrés, suspendus au fléau par des cordes, des chaînes ou des tringles de fer que l'on attache aux quatre angles; elles servent à peser les tonneaux, les caisses, les sacs et en général toutes les marchandises que l'on vend en gros; les pesées que l'on fait avec les plus fortes de ces balances ne vont guère au-delà de 1500 kilogrammes. Si l'on suppose que la sensibilité soit $\frac{1}{2000}$ de la charge d'un plateau, il faudra, lorsque la balance est en équilibre dans ces grandes pesées, mettre environ 750 grammes dans l'un des plateaux pour le faire sensiblement pencher; si l'on retire ensuite ce dernier poids, le fléau devra revenir dans la position horizontale.

On a remarqué qu'après avoir fait une forte pesée dans laquelle le plateau qui porte la marchandise enlève celui qui porte les poids, si l'on fait descendre celui-ci sur le sol, et qu'on le relève ensuite doucement, pour ramener le fléau dans la position horizontale, il retombe du côté des poids, et pour le faire incliner du côté de la marchandise, il faut en ajouter la quantité d'environ 1 kilogramme.

Souvent les grandes balances sont exposées à l'intempérie

de l'air, on ne leur donne pas les soins qui seraient nécessaires pour les garantir des altérations qui les rendent inexactes et qui exigent de fréquentes corrections: lorsqu'on veut s'en servir, on trouve ordinairement que l'un des bras, avec son plateau, est plus faible que l'autre, et il faut y ajouter le poids nécessaire pour rétablir l'égalité des deux bras ou l'équilibre de la balance. Les Anglais, qui ne négligent rien dans les plus petits détails de leurs machines usuelles, ont imaginé un moyen fort simple pour faciliter ces corrections: il consiste en un petit poids qui glisse le long d'un bras du fléau, et que l'on fixe à la distance convenable avec une vis de pression.

De la romaine.

96. La romaine est formée d'une barre de fer BC (*fig.* 53), qui représente un levier de la première espèce, divisé en deux bras très inégaux AB, AC, par un axe dont les parties saillantes sont taillées en couteaux; cette barre tourne dans une châsse AS, à peu près comme le fléau d'une balance, et sa position horizontale est indiquée, comme dans la balance, par une aiguille fixée au-dessus de l'axe; mais il n'y a qu'un seul bassin, ou même un seul crochet LM, suspendu au plus petit bras AB, par un deuxième axe aussi taillé en couteaux, en sens inverse de ceux du premier axe; c'est à ce crochet que l'on attache le corps ou la marchandise que l'on veut peser. Le plus grand bras AC porte un poids fixe P, que l'on peut faire glisser le long de ce bras, par le moyen d'un collier, ou d'un anneau D, taillé intérieurement en couteau, pour que le contact ait lieu sur une ligne qui occupe peu d'espace.

Le bassin ou le plateau d'une balance dans lequel on met les poids connus, est remplacé dans la romaine par le poids

constant P, dont l'effet augmente ou diminue suivant qu'on l'éloigne ou qu'on le rapproche de l'axe de suspension A.

Les diverses parties d'une romaine, que nous venons d'indiquer, étant exécutées avec tous les soins qu'exige la construction d'une bonne balance, il faut, pour achever cette romaine, diviser le plus long bras AC, en parties qui fassent connaître les valeurs relatives du poids constant.

Considérons d'abord la barre BC, qui forme les deux bras de la romaine, comme un levier sans pesanteur; si l'on attache successivement au crochet LM, des corps dont les poids soient exprimés par Q, Q', Q'', Q''', etc., et que pour chacun de ces poids on amène le poids constant P dans la position E, F, G, H, etc., où il doit être pour établir l'équilibre, on aura les équations suivantes:

$$\begin{aligned} Q \times AL &= P \times AE, \\ Q' \times AL &= P \times AF, \\ Q'' \times AL &= P \times AG, \\ Q''' \times AL &= P \times AH. \end{aligned}$$

Retranchons la première équation de la seconde, la seconde de la troisième, et la troisième de la quatrième, il viendra

$$\begin{aligned} (Q' - Q) \times AL &= P \times (AF - AE), \\ (Q'' - Q') \times AL &= P \times (AG - AF), \\ (Q''' - Q'') \times AL &= P \times (AH - AG). \end{aligned}$$

Si les poids Q, Q', Q'', Q''', forment une progression arithmétique, on aura

$$Q' - Q = Q'' - Q' = Q''' - Q'';$$

les distances AE, AF, AG, AH formeront aussi une pro-

gression arithmétique qui aura pour raison l'intervalle entre deux positions successives du poids constant P, et par conséquent ce poids devra être placé successivement à des intervalles égaux, d'où l'on peut déduire la règle suivante, pour diviser la romaine.

Attachez au crochet M le plus petit des poids Q qui puisse être pesé avec la romaine; amenez le poids constant P au point où il doit être pour établir l'équilibre, et marquez ce point par un cran E; substituez le poids Q' au poids Q, mettez ce deuxième poids en équilibre avec le poids constant P, ce qui donnera un autre point F que vous marquerez par un cran; divisez ensuite l'espace compris entre les points E et F en autant de parties égales que la différence Q' — Q renferme d'unités de poids.

Pour achever la division de la romaine, il suffira de porter l'une des divisions comprises entre E et F autant de fois qu'elle pourra être contenue dans le reste FC du levier qui doit former l'échelle.

97. Nous avons considéré la barre BC comme un levier sans pesanteur; cherchons maintenant si les résultats auxquels nous sommes parvenus éprouveront quelques changements, en faisant entrer le poids du levier dans le calcul.

Soient p le poids du bras AC de la romaine, que nous supposerons appliqué à son centre de gravité c; q le poids du bras AB, appliqué à son centre de gravité b, et m le poids du crochet LM; les autres quantités restant les mêmes que dans le premier cas, l'équilibre de la romaine sera exprimé par les équations suivantes (84):

$$Q \times AL + q \times Ab + m \times AL = P \times AE + p \times Ac,$$
$$Q' \times AL + q \times Ab + m \times AL = P \times AF + p \times Ac,$$
$$Q'' \times AL + q \times Ab + m \times AL = P \times AG + p \times Ac.$$

Il est facile de voir que si l'on retranche la première équation de la seconde, et la seconde équation de la troisième, les termes qui dépendent de la pesanteur du levier disparaîtront, et que l'on retrouvera les formules que nous avons obtenues en négligeant la pesanteur du fléau de la romaine.

98. Lorsqu'on veut faire usage de la romaine, on la suspend par le moyen de sa châsse AS; le corps qui doit être pesé étant attaché au crochet LM, on amène le poids fixe P dans la position qu'il doit occuper pour établir l'équilibre, et le nombre marqué par l'anneau D indique le poids du corps suspendu au crochet.

La division du grand bras d'une romaine fait connaître les deux limites des poids qu'elle peut peser directement; celle qui est représentée *fig.* 53, peut peser depuis 10 jusqu'à 60 kilogrammes, en se servant du poids constant seul; mais en ajoutant un ou plusieurs poids additionnels, on pourra, avec cette même romaine, peser des objets beaucoup plus lourds que les poids indiqués par son échelle.

Si l'on suspend à l'axe *a* un poids tel que le poids constant P étant placé à la première division E, le poids du corps attaché au crochet M soit de 60 kilogrammes, lorsque la romaine est en équilibre; alors, en transportant le poids constant P à la dernière division de l'échelle, il fera équilibre à un poids de 110 kilogrammes attaché au crochet.

En ajoutant d'autres poids additionnels, on pourra augmenter la puissance de la romaine jusqu'à la limite de l'effort qu'elle sera capable de supporter, en observant toutefois que la charge doit toujours être moindre que celle qui pourrait faire courber sensiblement le grand bras du fléau.

99. La partie la plus difficile de la construction d'une ro-

maine consiste dans l'ajustage des couteaux; on les fait en acier, comme ceux de la balance; le tranchant de celui de l'axe de suspension doit être dans la ligne qui passe par le fond des entailles de l'échelle; les tranchants de ceux qui supportent le crochet auquel on attache les corps qui doivent être pesés, et les poids additionnels, doivent être placés tant soit peu plus bas que celui de suspension.

Il y a des romaines de diverses dimensions: celles qui sont destinées à peser de petites quantités de marchandises ont souvent deux axes de suspension et deux échelles sur les côtés opposés du fléau, ou de la verge, dont l'un s'appelle le côté faible et l'autre le côté fort; mais, par cette disposition, la romaine devient un instrument compliqué; il est préférable de n'y mettre qu'une seule échelle, et d'en étendre l'usage avec des poids additionnels, autant que peut le permettre la résistance du fléau.

La romaine est peu oscillante, elle n'a pas autant de sensibilité qu'une bonne balance capable de peser le même poids; si la balance est préférable à la romaine, pour les objets qui doivent être pesés avec une grande précision, dans la plupart des applications journalières, où cette précision n'est pas nécessaire, la romaine a plusieurs avantages sur la balance: elle n'exige pas l'assortiment de poids qui est nécessaire pour celle-ci, on la transporte plus facilement et elle est plus expéditive; mais le principal avantage de la romaine, c'est de pouvoir peser des corps très lourds, pour lesquels aucune balance à bras égaux ne pourrait être employée.

La balance ordinaire et la romaine sont les instruments le plus en usage; ils peuvent être employés l'un et l'autre pour chercher les poids des corps avec toute l'exactitude qu'exigent les sciences physiques, les arts et le commerce; mais, par des

recherches sur les diverses manières dont on peut combiner le levier, on est parvenu à construire d'autres instruments qui ont offert des avantages qui les ont fait adopter : l'une de ces combinaisons le plus remarquable se trouve dans le *pont à bascule,* dont nous allons donner succinctement la description et le calcul.

100. Le pont à bascule, dont la *fig.* 54 représente le plan, et la *fig.* 55 une coupe suivant la largeur, est composé d'un plateau rectangulaire TT, que l'on nomme *tablier,* dont la longueur est d'environ 5 mètres et la largeur de $2^m,75$, sur lequel on amène les voitures, ou tout autre fardeau que l'on veut peser ; un système de leviers, placé sous ce tablier, forme le mécanisme qui fait connaître le poids du fardeau d'une manière simple et expéditive.

Le tablier T est composé de deux poutrelles assemblées avec deux entre toises bombées au milieu, ce qui forme un châssis que l'on a couvert de deux rangs de madriers, entre lesquels on a placé des planches de cuivre pour empêcher la pénétration des eaux pluviales ; ces madriers sont fixés au châssis avec des boulons serrés par des écrous, ils le débordent d'environ 8 centimètres : les tringles *v* servent à faire prendre pied aux chevaux.

Ce tablier est placé sur une fosse de 2 mètres de profondeur, dont les dimensions rectangulaires de la base supérieure sont un peu plus grandes que celles du châssis, afin qu'il puisse y entrer en laissant, sur les quatre côtés, un espace de 1 ou 2 centimètres, pour éviter le frottement, dans le cas où le châssis viendrait à s'étendre par l'effet de l'humidité, et permettre à l'air extérieur de pénétrer dans la fosse ; elle est garantie des eaux pluviales par le bombement du tablier, la saillie des madriers et la disposition des seuils et des plate-

bandes, qui dirigent ces eaux dans les rigoles pratiquées pour leur écoulement.

Il y a cinq piliers en pierres de taille qui sont élevés, l'un au milieu et les autres aux quatre angles de la fosse, pour placer le balancier et les deux leviers coudés qui forment le mécanisme du pont à bascule; le pilier du milieu, qui porte le support du balancier, a $1^m,6$ de hauteur; celle des quatre autres est de $1^m,5$; c'est sur ces piliers que sont scellés les deux étriers des leviers coudés.

101. On fixe sous le tablier deux traverses H en fonte, bombées au milieu comme les entretoises, qui ont chacune deux branches en équerres, ou deux poupées *ff*, dont les extrémités, garnies de coussinets en acier, viennent s'appuyer sur les couteaux des barres *nn* qui traversent les deux branches de chaque levier coudé: le tablier est supporté par ces deux traverses, que l'on nomme étriers.

Le balancier AD est un grand levier en fonte, traversé perpendiculairement par un axe en acier, dont les parties saillantes, taillées en couteaux, posent sur les coussinets du support B scellé sur le pilier K en pierres de taille, élevé au milieu de la fosse; c'est le support de l'axe de rotation du balancier; il a un autre axe au point C, dont les parties saillantes sont aussi taillées en couteaux, mais dans le sens opposé à ceux du premier axe; ses deux parties CA et BD, qui ont des longueurs inégales, sont courbées en contre-bas, afin que son centre de gravité soit au-dessous du centre de rotation.

A l'extrémité A du levier, on adapte une douille à coulisse que l'on fixe avec un piton à vis, elle sert à recevoir la tige soutenue par l'un des bras du fléau de la balance, qui est suspendu à une potence dans l'intérieur du bureau; l'autre

bras du fléau porte le plateau M, sur lequel on met les poids connus. Pour mettre en équilibre la plus longue partie BA, avec toutes les pièces qui agissent sur elles, on adapte à l'extrémité D de la partie la plus courte BD, un poids S, suspendu par un crochet au piton à écrou *t*; ce contre-poids est composé de plusieurs pièces en fonte de différentes épaisseurs, afin de pouvoir l'augmenter ou le diminuer, pour le mettre en équilibre avec ceux qui agissent sur l'autre partie du balancier.

Un poids curseur *r* de 2 ou 3 kilogrammes, est adapté par le moyen d'une bride à la plus longue partie BA du balancier; ce poids est un régulateur dont l'effet augmente proportionnellement à sa distance du centre de rotation; après l'avoir amené à la place convenable pour établir l'équilibre, on le fixe avec une vis de pression. Il serait utile d'adapter un régulateur semblable aux fléaux des grandes balances pour en faire la tare, lorsque l'équilibre est détruit par l'effet de l'humidité sur les plateaux.

Les deux leviers coudés, ou à deux branches *Cehii*, sont placés de part et d'autre du balancier, perpendiculairement à sa direction; les deux branches de chacun de ces leviers sont traversées par deux barres de fer *mm* et *nn*: les extrémités de ces barres sont en acier, et elles sont taillées en couteaux dont les biseaux sont disposés en sens contraire; les couteaux des barres *mm*, dont les biseaux sont en contre-bas, posent sur les coussinets des étriers scellés sur les piliers LL; c'est sur ces coussinets que les leviers coudés tournent, lorsque la charge du tablier les fait descendre; alors les couteaux des barres *nn* cèdent et sont entraînés par la pression que les étriers *ff*, qui leur correspondent, leur font éprouver.

Les extrémités des leviers coudés, adjacentes au balan-

cier, sont arrondies et taillées en fourchettes pour recevoir une pièce arrêtée par un boulon, autour duquel elle tourne librement. Cette pièce porte un anneau à son extrémité; on fait entrer les parties saillantes de l'axe C dans ces anneaux, pour fixer les leviers coudés au balancier; alors les leviers coudés ne peuvent pas descendre sans entraîner le balancier, et si celui-ci est relevé par la tige qui est attachée au fléau de la balance, il élève en même temps les leviers coudés; ainsi le mouvement d'oscillation des leviers est transmis à la balance: il ne s'agit plus que de connaître le rapport du poids qui met la balance en équilibre avec celui qui est placé sur le tablier, pour déterminer ce dernier poids.

102. Dans la recherche des conditions d'équilibre du pont à bascule, lorsque le tablier est chargé d'une voiture, ou d'un autre fardeau quelconque, il n'y a pas lieu de faire entrer le poids des leviers dans les calculs, puisque la tare a été faite, pour mettre les leviers en équilibre avant la charge du tablier.

Le levier coudé *Cehii* peut être considéré comme un levier droit C*b*, dont l'appui serait au point *b* de la barre *mm*, et sur lequel la résistance ou la pression *q* agirait au point *c* de la barre *nn*; en désignant par *p* la force capable de mettre cette pression en équilibre, on aura, d'après le principe du levier (83),

$$p \times Cb = q \times cb, \quad p = \frac{q \times cb}{Cb};$$

le deuxième levier coudé donnerait une équation semblable à celle que nous venons de trouver, ce qui ne changerait rien au rapport que nous cherchons.

Ces deux leviers coudés, qui sont attachés au point C du grand levier, ou du balancier AD, lui transmettent chacun

une pression égale à p, et l'effet de cette pression, qui tend à faire tourner le balancier sur les coussinets du support B, doit être détruit par la force P qui agit au point A de bas en haut, ou par les poids que l'on met sur le plateau M, suspendu à l'un des bras de la balance, dont l'autre bras est attaché à la tige fixée au balancier. D'après ces dispositions, l'équilibre du balancier donnera l'équation suivante:

$$P \times AB = p \times BC, \quad P = \frac{p \times BC}{AB};$$

substituons, à la place de p, sa valeur prise dans l'équation précédente, il viendra

$$P = \frac{BC \times bc}{AB \times bC} \times q.$$

Le rapport de la puissance P à la résistance q, dépend du coefficient $\frac{BC \times bc}{AB \times bC}$, qui multiplie cette dernière force; mais les axes ou les couteaux qui divisent les leviers, sont placés de manière qu'on a $AB = 10BC$ et $bC = 10bc$, ce qui donne

$$\frac{BC \times bc}{AB \times bC} = \frac{BC \times bc}{10BC \times 10bc} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0{,}01,$$

et par conséquent $\qquad P = 0{,}01\,q;$

ce qui fait voir que la force P n'est que la centième partie de la résistance q, c'est-à-dire qu'un poids placé sur le plateau M de la balance fait équilibre à un poids cent fois plus grand placé sur le tablier.

103. En faisant entrer une voiture sur le pont à bascule, pour la peser, on doit la placer de manière que son centre de

gravité corresponde à peu près au milieu du tablier, parce que si la charge de l'un des côtés était beaucoup plus forte que celle du côté opposé, le tablier tendrait à se tordre, et les couteaux se dérangeraient de la position qu'ils doivent avoir sur leurs coussinets.

Les oscillations du tablier sont très petites à cause du peu de longueur des bras de leviers coudés, compris entre la barre *mm*, dont les couteaux portent sur les coussinets fixes, et la barre *nn*, dont les couteaux reçoivent la pression des coussinets fixés à l'étrier placé au-dessus de ces couteaux; mais l'extrémité C du levier coudé, qui est attachée au balancier, parcourt un espace décuple de celui que la pression de la charge fait parcourir aux couteaux de la barre *nn* sur lesquels elle agit, et l'espace que parcourt l'extrémité A du balancier est décuple de celui que parcourt le point C; ainsi le mouvement de l'extrémité du balancier, qui est transmis au fléau de la balance, lui fait faire de grandes oscillations, quoique celles du tablier soient très petites.

Toutes les pièces du pont à bascule sont construites avec la solidité qu'elles doivent avoir pour résister aux plus grandes charges qui puissent être transportées par les voitures et les chariots; les couteaux des leviers coudés et du balancier n'ont pas leurs biseaux, ou leurs tranchants très aigus, d'où il résulte que le frottement de ces couteaux sur leurs coussinets ne permet pas aux leviers de tourner avec une aussi grande sensibilité que le fléau d'une balance. Lorsque toutes les parties du mécanisme d'un pont à bascule sont en bon état, et que l'équilibre existe sans aucune charge, 1 myriagramme placé sur le tablier, doit faire sensiblement trébucher le fléau de la balance.

Les couteaux des leviers ayant leurs biseaux obtus, ils peu-

vent supporter les charges des plus lourdes voitures sans s'ébrècher; mais lorsqu'une voiture entre sur le tablier, elle lui fait éprouver une secousse dont l'effet pourrait occasionner des dégradations dans le mécanisme. Pour remédier à cet inconvénient, on a des vérins aux quatre angles du tablier, pour l'élever et le soutenir lorsque les coussinets des poupées *ff* sont à une petite distance des couteaux qui leur correspondent; ces vérins ne sont pas figurés dans le dessin, on les tourne lorsque la voiture que l'on veut peser est sur le tablier, pour le descendre sur le mécanisme; et lorsque la pesée est faite, on tourne les vérins avant de faire sortir la voiture pour relever le tablier.

Si les quatre vérins ne sont pas tournés simultanément, il faut au moins tourner à la fois les deux d'une tête du tablier, et ensuite les deux autres, afin d'éviter l'obliquité qui ferait porter inégalement les couteaux sur leurs coussinets.

Le pont à bascule de la barrière de Charenton a été réparé dans le mois de septembre 1827, on y a mis un nouveau tablier qui n'a point de vérins; je suis allé plusieurs fois examiner les détails du mécanisme, je suis descendu dans la fosse lorsqu'il a été monté, mais mes observations, faites à la faible lumière d'une chandelle, n'ont pas été aussi complètes que je l'aurais désiré: je pense que les pièces qu'on y a ajoutées (ce sont des supports placés sous les barres *nn*) ont pour objet d'empêcher que les voitures ne produisent de trop grandes oscillations, lorsqu'elles entrent sur le tablier.

De la poulie.

104. La poulie est une roue en bois ou en métal qui a, au milieu de sa circonférence, une rainure en demi-cercle que l'on appelle gorge, et dans laquelle on fait passer une corde

ou une chaîne; lorsque la poulie est en bois, sa forme est celle d'un cylindre plein d'une petite épaisseur; lorsqu'elle est en fer, en cuivre ou d'autre métal, elle est ordinairement évidée avec des rais; si elle est pleine, on creuse symétriquement ses deux surfaces opposées pour l'allégir.

Le centre de la poulie est percé d'un trou pour recevoir l'essieu ou l'axe autour duquel elle doit tourner; il faut qu'elle soit ajustée de manière que son mouvement de rotation éprouve le moins de frottement possible, et la force de son axe ou de l'essieu doit être assez grande pour résister à la charge qu'il devra supporter.

On fait usage de la poulie dans un grand nombre de circonstances, et principalement lorsqu'il s'agit de l'élévation des corps, soit pour les tirer de l'intérieur de la terre, soit pour les monter à la hauteur de la surface sur laquelle on veut les placer; la poulie donne les moyens de faire agir la puissance dans la direction qui lui est la plus favorable, et lorsque cette puissance est produite par la force des hommes ou celle des chevaux, on peut en augmenter le nombre autant que le permet l'emplacement dans lequel ils doivent agir.

Pour élever les pierres de taille et les autres matériaux qui entrent dans la construction des bâtiments, on se sert fréquemment d'un appareil très simple, dont la *fig.* 56 représente l'esquisse; il est composé d'un mât vertical AB, avec deux pièces DE, IH, qui se croisent et qui sont solidement assemblées à la partie supérieure du mât; la première de ces pièces porte deux poulies *m* et *m'*, sur lesquelles on fait passer une corde que l'on attache d'un côté au fardeau Q que l'on veut élever, et la puissance P exerce son action en tirant cette corde de l'autre côté. Si la force des hommes est la puissance

que l'on fait agir, ils peuvent tirer la corde de haut en bas; mais par le moyen d'une poulie de renvoi m'', les hommes qui forment la puissance désignée par P pourront tirer la corde suivant une direction qui leur sera moins pénible que celle de haut en bas. Cette disposition a été employée pour les magasins à fourrages que le Gouvernement a fait construire à Bercy.

105. On peut fixer les parties saillantes de l'axe d'une poulie de manière que cet axe soit soutenu par les pièces du mécanisme dont elle doit faire partie; mais dans la plupart des applications, la poulie tourne librement entre les deux branches d'une monture que l'on nomme *chape;* l'extrémité de la chape, qui dépasse la circonférence de la poulie, est terminée par un crochet ou par un anneau, et ses branches sont traversées de part et d'autre par l'axe de la poulie.

Il y a deux manières de disposer la poulie pour les usages auxquels cette machine doit être employée; elle peut être fixe ou mobile.

La poulie fixe est celle dont la chape GI (*fig.* 57) est attachée au crochet K d'un support solidement établi; alors, pour élever un fardeau Q, on l'attache à une corde QFHE, qui passe sur la poulie, et l'on applique une force P à l'autre bout de cette corde; les directions EF, FQ, de la force P, et de la résistance, ou du fardeau Q, sont tangentes à la circonférence de la poulie.

Une poulie mobile est celle dont la chape GI (*fig.* 58) est attachée à un obstacle qu'il s'agit de vaincre, ou bien à un fardeau Q que l'on veut élever; alors on attache une corde KFHE, qui passe dans la gorge de la poulie, à un point fixe K, et l'on applique à l'autre bout de cette corde une force P, qui tend à élever en même temps la poulie et le fardeau.

On forme, avec la poulie fixe et la poulie mobile, des machines qu'on appelle *moufles*, dans les travaux ordinaires, et *palans, caliornes*, dans les applications à la marine: en employant une moufle, on peut élever un fardeau considérable avec une médiocre puissance, et donner à cette puissance la direction qui lui est le plus convenable.

106. Les principes sur lesquels les conditions d'équilibre sont fondées dans toutes ces machines, se déduisent de celles qui ont pour objet la poulie simple; nous allons d'abord exposer ces conditions, ensuite nous en ferons l'application pour déterminer les avantages que présentent les machines composées de plusieurs poulies simples, ou les moufles.

Trouver les conditions qui doivent être satisfaites pour que deux forces appliquées à une poulie soient en équilibre. — Supposons que la poulie soit fixe, et que la chape GI (*fig.* 57) soit attachée au cordon IK retenu par le crochet K.

Soient P et Q deux forces appliquées à une corde qui passe sur la poulie circulaire GEHF; nous pouvons considérer P comme une puissance qui tire la corde pour élever le poids Q attaché à cette corde: les cordons EP, FQ, sont deux tangentes à la circonférence de la poulie.

L'équilibre ne peut avoir lieu que dans le cas où la force P et le poids, ou la résistance Q, sont égales entre elles; si ces deux forces étaient inégales, la plus grande entraînerait la plus faible, puisque, par hypothèse, la poulie peut tourner librement autour de son axe, et que la corde est parfaitement flexible et inextensible.

Les cordons PE, QF, étant prolongés jusqu'à leur rencontre au point A, les deux forces P et Q pourront être appliquées à ce point: soient Ab, Ac, les droites qui représentent ces forces; si l'on achève le parallélogramme AbDc, la diagonale

AD représentera la résultante R des forces P et Q; cette résultante exprime la pression que les deux composantes exercent sur le centre G de la poulie: mais si l'équilibre existe, la résultante R doit être détruite par la résistance du centre de la poulie; donc la direction AD de la résultante doit passer par ce centre G, et la chape GI pouvant tourner librement autour du centre de la poulie, elle prendra la direction de la diagonale AD.

Puisque les forces P et Q sont égales, le parallélogramme A*b*D*c* est un rhombe, le triangle AD*b* est isoscèle, et l'angle A*b*D est supplément de l'angle *b*A*c*.

Les forces P et R, représentées par les côtés A*b*, AD du triangle A*b*D, sont proportionnelles aux sinus des angles opposés à ces côtés; ainsi on a la proportion suivante:

$$P : R :: \sin DAb : \sin AbD \text{ ou } \sin bAc;$$

l'angle $bAc = 2DAb$, ce qui donne

$$\sin bAc = \sin 2DAb = 2\sin DAb \cos DAb.$$

En substituant cette valeur de sin bAc dans la proportion, et négligeant le facteur commun sin DAb, il viendra

$$P : R :: 1 : 2\cos DAb, \quad R = 2P\cos DAb.$$

On pourrait déterminer, par cette formule, la valeur de l'une des trois quantités qu'elle renferme, lorsque les deux autres sont connues; mais pour rendre le calcul plus facile, nous allons chercher une autre formule qui ne renfermera point d'expression trigonométrique.

Soient E et F les points de contact des cordons EP, FQ

avec la circonférence de la poulie; par le centre G, menons les rayons GE, GF, et joignons EF: les deux triangles AbD, GEF, ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, par conséquent ces deux triangles sont semblables, et l'angle DAb = GEL.

Le triangle rectangle GEL donne

$$1 : \cos \text{GEL} \text{ ou } \cos \text{DA}b :: \text{GE} : \text{EL ou } \tfrac{1}{2}\text{EF},$$

d'où l'on tire

$$\cos \text{DA}b = \frac{\frac{1}{2}\text{EF}}{\text{GE}} = \frac{\text{EF}}{2\text{GE}};$$

en substituant cette valeur de cos DAb dans la formule précédente, on aura

$$\text{R} = 2\text{P} \times \frac{\text{EF}}{2\text{GE}} = \frac{\text{P} \times \text{EF}}{\text{GE}},$$

ce qui donne la proportion

$$\text{R} : \text{P} :: \text{EF} : \text{GE}.$$

C'est-à-dire que la résultante des deux forces égales P et Q, on la charge de l'axe, est à l'une de ces forces, comme la corde, ou la soutendante qui joint les points de contact, est au rayon de la poulie.

Lorsque les directions des forces P, Q ne sont pas parallèles, la pression qu'éprouve le centre G de la poulie est moindre que le double de l'une de ces forces; par exemple, si l'angle DAb = GEL = 60°, on aura cos DAb = cos 60° = $\frac{1}{2}$, d'où il résulte que EF = GE, et par conséquent R = P; alors la corde n'enveloppe que la sixième partie de la circon-

férence de la poulie, et la charge de l'axe est égale à la force P ou au poids du fardeau Q.

Si la direction de la force P et celle du poids Q sont parallèles, la corde embrassera la moitié de la poulie, et l'on aura

$$EF = 2GE, \quad R = 2P = P + Q.$$

Le centre de la poulie éprouvera une pression égale à la somme des deux forces qui tirent la corde en sens contraire.

Nous avons négligé le poids de la poulie; si l'on voulait y avoir égard, on le considérerait comme une force verticale appliquée à son centre, et l'on composerait cette force avec la résultante R des deux forces P et Q; mais dans les applications ordinaires, le poids de la poulie, comparativement à celui qu'il s'agit d'élever avec cette machine, est une quantité assez petite pour que l'on puisse la négliger sans qu'il en résulte d'erreur sensible dans le résultat du calcul.

107. Soit la poulie mobile GEHF (*fig.* 58), appliquée soit à vaincre une résistance, soit à élever un poids Q, qui peut être attaché directement à la chape GI, ou par le moyen du cordon IQ; la corde PEHFK, qui passe dans la gorge de la poulie, est attachée au point fixe K, et une puissance ou une force P est appliquée à la même corde, de l'autre côté de la poulie. Lorsque l'équilibre a lieu, les deux cordons EP, FK, sont également tendus, car si la tension produite par la force P n'était pas égale à celle du cordon fixé en K, la poulie glisserait du côté de la plus faible tension, et l'équilibre n'existerait pas.

Les cordons EP, FK, sont deux tangentes aux points E et F de la circonférence de la poulie; ces cordons étant pro-

longés jusqu'à leur rencontre au point A, la direction de la chape passera par le point d'intersection A, et partagera l'angle PAK en deux parties égales.

La pression que le fardeau Q exerce sur l'axe, ou sur le centre de la poulie, est égale au poids de ce fardeau; si l'on représente ce poids par la droite AD, et que par le point D on mène les droites Dc, Db, respectivement parallèles aux droites AP, AK, les tensions des cordons EP, FK, seront représentées par les côtés Ab, Ac, du parallélogramme, ou du rhombe AbDc.

Le triangle ADb est isoscèle, et l'angle AbD est supplément de l'angle DbE $=$ bAc $=$ 2DAb, ce qui donne

$$Ab : AD :: \sin DAb : \sin 2DAb \text{ ou } 2 \sin DAb \cos DAb;$$

en supprimant le facteur commun sin DAb, et observant que les droites Ab et AD sont proportionnelles aux puissances P et R, on aura

$$P : R :: 1 : 2 \cos DAb, \quad R = 2P \cos DAb.$$

Cette formule est la même que celle que nous avons trouvée pour l'équilibre de la poulie fixe.

Si par le centre G de la poulie, on mène les rayons GE, GF, aux points de contact des cordons EP, FQ, et que l'on joigne EF, les triangles ADb, EGF, qui ont leurs côtés perpendiculaires, seront semblables, et l'on aura

$$Ab : AD :: GE : EF;$$
$$P : R :: GE : EF; \quad P = \frac{R \times GE}{EF}.$$

C'est-à-dire que pour mettre un fardeau en équilibre, par le

moyeu d'une poulie mobile, il faut que la puissance soit au poids du fardeau comme le rayon de la poulie est à la soutendante de l'arc enveloppé par la corde, ou bien que la puissance doit être égale au poids du fardeau multiplié par le rayon de la poulie et divisé par la soutendante de l'arc enveloppé par la corde.

Si l'on voulait faire entrer le poids de la poulie dans le calcul, il suffirait de l'ajouter au poids du fardeau appliqué à la chape.

Dans les applications que l'on fait de la poulie mobile, soit pour vaincre une résistance, par exemple, pour arracher un pieu enfoncé dans la terre; soit pour traîner ou élever un fardeau, l'avantage de la puissance dépend de la longueur de l'arc EHF enveloppé par la corde, ou de sa soutendante EF: lorsque l'arc EHF est une demi-circonférence, les cordons EP, FK, sont parallèles; alors EF est un diamètre, ou le double du rayon GE: ce diamètre est plus grand que toute autre ligne droite qui soutend un arc; dans ce cas, l'expression de la puissance devient

$$P = \frac{R \times GE}{2GE} = \frac{1}{2} R.$$

La puissance est la moitié du poids du fardeau, c'est le plus grand avantage qu'elle puisse avoir lorsqu'elle agit par le moyen d'une poulie mobile; mais cet avantage est acquis par une compensation: c'est que l'espace qui doit être parcouru par la puissance est double de celui qu'elle fera parcourir, dans le même temps, au fardeau attaché à la chape de la poulie; ainsi *ce que l'on gagne en force on le perd en temps*. C'est un principe général auquel sont subordonnés les effets de toutes les machines.

108. Pour élever le fardeau Q avec la corde qui passe sur les poulies fixes du mât AB (*fig.* 56), on peut attacher cette corde à l'extrémité D de la traverse supérieure, la faire passer dans la gorge de la poulie mobile n, attacher le fardeau Q à la chape de cette poulie, et faire passer, sur les poulies fixes, la corde à laquelle la puissance doit être appliquée. Par cette disposition, la puissance pourra élever un fardeau d'un poids deux fois plus grand que celui qu'elle élèverait sans la poulie mobile; mais avec cette force double, l'espace qu'elle devra parcourir sera deux fois plus grand, ou bien la vitesse du fardeau ne sera que la moitié de celle de la puissance.

D'après ce qui a été démontré sur les propriétés de la poulie fixe, on a vu que cette poulie ne procure aucun avantage réel à la puissance, elle ne sert qu'à changer sa direction; par exemple, au lieu de tirer de bas en haut, pour élever directement un fardeau, on peut, par le moyen d'une poulie fixe, produire le même effet en tirant de haut en bas, et avec une autre poulie fixe, qu'on nomme poulie de renvoi, on peut faire agir la puissance soit dans la direction horizontale, soit dans une direction qui fasse un angle quelconque avec l'horizontale.

Par cette simple transformation dans la direction de la puissance, les hommes ont l'avantage de pouvoir employer leurs forces avec moins de fatigue; et, lorsque les circonstances le permettent, ils peuvent être remplacés par des chevaux ou par des bœufs, dont la force est d'un prix moindre que celle des hommes.

Mais en employant la poulie mobile, la puissance nécessaire pour mettre un fardeau en équilibre, est à ce fardeau comme le rayon de la poulie est à la soutendante de l'arc en-

veloppé par la corde; par conséquent, la puissance sera plus grande, égale ou plus petite que le poids du fardeau, suivant que le rayon de la poulie sera plus grand, égal ou plus petit que la soutendante.

109. Puisque l'effet d'une puissance peut être augmenté en employant une poulie mobile, si l'on a une forte résistance à vaincre, ou un fardeau considérable à élever, et que l'on ne puisse disposer que d'une puissance médiocre, on pourra chercher à rendre cette puissance capable de surmonter l'obstacle auquel elle doit être appliquée, par le moyen de plusieurs poulies mobiles convenablement disposées.

Soit un fardeau Q (*fig.* 59), attaché à la chape d'une poulie mobile, enveloppée par une corde attachée au point K d'une barre fixe AB, et tirée à l'autre extrémité par une puissance P′; que cette force P′ soit remplacée par une seconde poulie mobile, enveloppée par une corde attachée au point K′ de la barre fixe, et qu'elle soit tirée à l'autre extrémité par une force P″; que cette force soit encore remplacée par une troisième poulie mobile, enveloppée par une corde attachée à la même barre que les précédentes au point K″, et que l'autre cordon soit tiré par une force P. On peut employer une poulie fixe L pour changer la direction de la puissance P; au lieu de tirer de bas en haut, cette puissance tirera de haut en bas: la poulie de renvoi ne produit aucun changement dans l'intensité de la puissance, elle sert seulement à lui faire prendre la direction qui lui convient le mieux.

110. Pour trouver le rapport de la puissance P au poids du fardeau Q, lorsque l'équilibre a lieu, nous considérerons séparément chacune des poulies mobiles.

L'équilibre étant établi par le moyen de la puissance P′, appliquée à la corde qui soutient la première poulie, si du

centre G de cette poulie on mène aux points de contact E et F, les rayons GE, GF, et que l'on joigne EF, on aura la proportion

$$P' : Q :: GE : EF;$$

en faisant la même construction dans chacune des autres poulies, on aura

$$P'' : P' :: G'E' : E'F',$$
$$P : P'' :: G''E'' : E''F''.$$

Ces proportions étant multipliées par ordre, en négligeant les facteurs communs dans le premier rapport, il viendra

$$P : Q :: GE \times G'E' \times G''E'' : EF \times E'F' \times E''F''.$$

C'est-à-dire que la puissance est au poids du fardeau, comme le produit des rayons de toutes les poulies est au produit des soutendantes des arcs enveloppés par les cordes.

Pour procurer à la puissance P le plus grand avantage possible, on dispose les poulies mobiles de manière que tous les cordons soient parallèles entre eux (*fig.* 60); alors chacune des soutendantes EF, E'F', E''F'', est égale au diamètre ou au double du rayon, et la proportion composée devient

$$P : Q :: GE \times G'E' \times G''E'' : 2GE \times 2G'E' \times 2G''E''$$
$$:: 1 : 2^3 :: 1 : 8.$$

On voit, par ce résultat, que l'intensité de la puissance capable de mettre un poids en équilibre, par le moyen de trois poulies mobiles, devrait être seulement la huitième partie de ce poids, si le frottement et la raideur des cordes ne produisaient aucune résistance.

En désignant par n le nombre des poulies mobiles disposées comme celles de la *fig*. 60, on aura

$$P : Q :: 1 : 2^n; \quad P = \frac{Q}{2^n}.$$

La force, ou la puissance, nécessaire pour mettre le fardeau en équilibre, devrait être égale au quotient du poids de ce fardeau divisé par la puissance de 2 qui a pour exposant le nombre des poulies. Par exemple, s'il y avait dix poulies, il ne faudrait qu'une puissance équivalente à 1 kilogramme pour mettre en équilibre un fardeau de 1024 kilogrammes.

Les pressions qu'éprouvent les points K, K′, K″, auxquels les cordons sont attachés, et celle du centre de la poulie de renvoi L, sont faciles à déterminer : on voit d'abord que la somme de toutes ces pressions est égale à la somme du poids Q et de la puissance P qui fait équilibre à ce poids.

La tension du cordon KF, ou la pression sur le point K, est égale à $\frac{1}{2}Q$; le point K′ éprouve une pression égale à $\frac{1}{4}Q$, et celle que le point K″ éprouve est égale à $\frac{1}{8}Q$; enfin le centre de la poulie fixe L, ou de la poulie de renvoi, éprouve une pression égale à $2 \times \frac{1}{8}Q = \frac{1}{4}Q$. En ajoutant toutes ces pressions, on aura

$$\frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{8}Q + \frac{1}{4}Q = Q + \frac{1}{8}Q = Q + P.$$

111. Dans un assemblage de poulies mobiles semblable à celui qui est représenté *fig*. 60, appliqué pour vaincre un obstacle ou pour élever un fardeau, la puissauce décroît à mesure que le nombre des poulies augmente; mais s'il s'agit

d'élever un poids à une certaine hauteur, alors la puissance doit parcourir un espace d'autant plus grand, qu'il y a un plus grand nombre de poulies; ainsi l'on ne peut gagner sur la force qu'autant que l'on perd sur le temps, ou sur l'espace que doit parcourir la puissance.

Avec une seule poulie mobile EHF, la puissance P′ parcourrait un espace de 2 mètres pour élever le fardeau Q à la hauteur de 1 mètre; car si l'on imagine que le cordon KF soit une ligne droite inflexible, et que la puissance P′ élève le fardeau Q de 1 mètre, de manière que le diamètre EF de la poulie reste perpendiculaire à KF, alors la longueur de la partie de KF qui sera au-dessous de EF sera de 1 mètre, et lorsque cette partie du cordon KF s'enroule autour de la poulie, il est évident que la puissance P′ doit parcourir 2 mètres pour élever le fardeau Q de 1 mètre: donc l'espace que parcourt la puissance P′ est double de celui qu'elle fait parcourir au fardeau Q. Par la même raison, la puissance P″ doit parcourir un espace double de celui que parcourt la puissance P′; ainsi elle parcourra un espace quadruple de celui que parcourt le fardeau Q, et la puissance P, qui doit parcourir un espace double de celui que parcourt la puissance P″, parcourra un espace huit fois aussi grand que celui que parcourt le fardeau Q.

112. On peut renfermer plusieurs poulies dans une même chape, on forme alors ce qu'on appelle une *moufle;* la *fig.* 61 représente deux moufles MN et M′N′, qui ont chacune trois poulies; deux anneaux K et L sont adaptés à la chape de la première moufle pour la fixer à un support, elle porte aussi une boucle I, à laquelle on attache l'un des bouts de la corde qui assemble les deux moufles, en passant dans les gorges de toutes les poulies. La moufle mobile M′N′ est munie de

deux crochets auxquels on attache le fardeau Q que l'on veut élever par l'action d'une puissance P, appliquée au bout de la corde qui passe sur la poulie A de la moufle fixe. Nous allons chercher les conditions qui doivent être satisfaites pour que cette puissance P et le fardeau Q soient en équilibre.

La puissance P, appliquée à la corde, produit un effet tel, que tous les cordons compris entre la moufle fixe et la moufle mobile sont également tendus, et chacun de ces cordons éprouve une tension égale à l'intensité de la puissance. En effet, d'après ce que nous avons démontré sur la poulie mobile (**107**), les cordons C'I et C'C sont également tendus; il en est de même des cordons C'C et B'C, B'C et B'B, etc.

Menons les deux axes OX, OY, le premier suivant la direction horizontale et l'autre vertical; et, pour décomposer les tensions des cordons parallèlement à ces axes, prenons sur la direction du cordon C'I, à partir du point où il coupe l'axe des x, la distance $nl = t$, pour représenter sa tension; nous avons prouvé que cette tension est la même pour tous les autres cordons, et qu'elle est égale à l'intensité de la puissance P. Décrivons le rectangle $lmnk$, dont les côtés sont parallèles aux axes, et faisons, pour abréger, l'angle $lnm = a$, le triangle rectangle nml donnera

$$1 : \cos a :: nl \text{ ou } t : nm = t\cos a;$$

c'est l'expression de la composante verticale de la tension du cordon C'I. Il est inutile de calculer la composante parallèle à l'axe des x, parce que dans le cas d'équilibre dont nous nous occupons, toutes les composantes parallèles à cet axe se détruisent.

En décomposant de la même manière les tensions des autres cordons, et désignant par a', a'', etc., les angles qu'ils forment avec la verticale, on trouvera, pour les composantes verticales,

$$t \cos a', \quad t \cos a'', \quad t \cos a''', \quad t \cos a^{\text{iv}}, \quad t \cos a^{\text{v}}.$$

Le fardeau Q doit être égal à la somme des composantes verticales des tensions de tous les cordons, ce qui donne l'équation d'équilibre

$$Q = t(\cos a + \cos a' + \cos a'' + \cos a''' + \cos a^{\text{iv}} + \cos a^{\text{v}}).$$

La tension t peut être remplacée par la puissance P qui lui est égale; ainsi on a la proportion suivante:

$$P : Q :: 1 : \cos a + \cos a' + \cos a'' + \cos a''' + \cos a^{\text{iv}} + \cos a^{\text{v}}.$$

C'est-à-dire que la puissance est au fardeau, comme l'unité, ou le rayon de la Table des sinus, est à la somme des cosinus des angles formés par les directions des cordons avec la verticale.

L'angle lnm, formé par le cordon C'I avec la verticale, est le complément de l'angle lnk, formé par ce même cordon avec l'axe des x; ainsi l'on a $\cos lnm = \sin lnk$; d'où il résulte qu'au lieu des cosinus des angles formés par les cordons avec la verticale, on pourrait prendre les sinus des angles formés par ces mêmes cordons avec l'axe des x.

113. Si les poulies des deux moufles sont de même diamètre, et qu'elles soient placées dans les chapes MN, M'N', de manière que la distance des centres soit de deux fois le diamètre d'une poulie, tous les cordons seront parallèles

entre eux; les angles a, a', a'', etc., seront nuls, et le cosinus de chacun de ces angles sera le rayon, que l'on suppose égal à l'unité; d'après cette disposition, qui est celle qui donne le plus grand avantage que puisse avoir la puissance, la proportion précédente devient

$$P : Q :: 1 : 6;$$

ce qui fait voir que la tension de chaque cordon, ou l'intensité de la puissance, est la sixième partie du poids du fardeau.

La corde pourrait être attachée à la chape de la moufle mobile; alors il n'y aurait que cinq cordons, et la puissance serait la cinquième partie du fardeau.

Le point auquel la corde est attachée à la chape de la moufle mobile, peut être considéré comme une poulie dont le diamètre est très petit; les deux cordons de cette poulie coïncident l'un avec l'autre.

On ajoutera au poids du fardeau Q celui de la moufle mobile, lorsque ce dernier poids sera assez considérable pour que l'on ne puisse pas le négliger sans occasionner une erreur sensible dans le résultat du calcul; en désignant ce poids par q, et le nombre des cordons par n, on aura la formule

$$P = \frac{Q+q}{n},$$

qui renferme l'expression algébrique de la règle suivante:

Pour trouver la puissance capable de mettre un fardeau en équilibre, par le moyen d'une paire de moufles, divisez la somme des poids de ce fardeau et de la moufle mobile par le nombre des cordons, ou par celui des poulies que renferment les deux moufles.

Les moufles horizontales sont très peu en usage, parce qu'elles sont trop volumineuses, ce qui les rendrait embarrassantes dans les travaux pour lesquels on voudrait s'en servir; mais leur disposition est commode pour démontrer les conditions qui doivent être satisfaites, afin que l'équilibre puisse exister entre le fardeau suspendu à la moufle mobile et la puissance appliquée au cordon qui passe sur la dernière poulie de la moufle fixe. Ces conditions sont absolument les mêmes pour toutes les espèces de moufles; ainsi il sera facile d'en faire l'application aux moufles verticales dont nous allons nous occuper.

114. On a imaginé diverses combinaisons pour l'arrangement des poulies dans les moufles verticales; l'une des plus simples est celle qui est représentée dans la *fig.* 62.

La chape de la moufle fixe renferme les deux poulies A et B, placées l'une à la suite de l'autre; le diamètre de la première est double de celui de la seconde; cette chape est terminée par un crochet I à sa partie inférieure, et il y a une boucle K à sa partie supérieure, pour l'attacher au support fixe LM, soit par le moyen d'un crochet, soit avec un lien de corde ou de chaîne.

Les deux poulies A' et B' de la moufle mobile sont égales à celles de la moufle fixe, mais elles sont placées dans un ordre inverse; la chape de la moufle mobile est terminée par un crochet N à sa partie inférieure, et sa partie supérieure porte une traverse horizontale RS, composée de deux branches assemblées par des boulons.

On attache la corde au crochet de la moufle fixe, on la fait passer dans l'ouverture comprise entre les deux branches de la traverse RS, elle passe ensuite successivement dans les gorges de toutes les poulies de la moufle mobile et de la moufle fixe.

La traverse sert à guider les cordons.

Le fardeau Q est attaché au crochet N de la moufle mobile, et la puissance P, qui doit mettre ce fardeau en équilibre, est appliquée au prolongement du cordon qui passe dans la gorge de la poulie A.

D'après la disposition de ces moufles, il y a quatre cordons qui sont tous parallèles entre eux; on peut négliger le poids de la moufle mobile, et, d'après ce que nous avons démontré sur les moufles horizontales, l'équilibre entre la puissance P et le fardeau Q sera exprimé par la formule

$$P = \frac{Q}{4};$$

ce qui fait voir qu'une puissance égale au quart du fardeau suffirait pour le mettre en équilibre, si une partie de l'effet théorique de cette puissance n'était pas employée à vaincre les résistances produites par le frottement et la raideur des cordes.

En ajoutant une ou plusieurs poulies à chaque moufle, et observant que les diamètres de toutes les poulies renfermées dans une chape doivent croître suivant une progression arithmétique, qui a pour différence le diamètre de la plus petite poulie, afin que les cordons puissent être parallèles, on augmenterait l'avantage de la puissance; mais alors il faudrait allonger les chapes, et les moufles occuperaient, dans la direction verticale, une longueur telle que dans un grand nombre de circonstauces on ne pourrait pas s'en servir.

115. Pour éviter l'inconvénient qui résulte de la longueur des chapes, on a construit les moufles avec des poulies de même diamètre, et toutes celles que renferme chaque moufle sont traversées par le même axe.

Deux moufles construites suivant les dispositions que nous

venons d'indiquer, sont représentées par leurs projections dans les *fig.* 63 et 64; la chape de chacune de ces moufles renferme trois poulies dont les diamètres sont égaux : la chape et les poulies de la moufle supérieure sont traversées par l'axe DE, et l'axe D'E' traverse la chape et les poulies de la moufle inférieure, ou de la moufle mobile.

On attache la corde par un nœud autour de la chape de la moufle supérieure; on fait passer cette corde dans la gorge de la première poulie de la moufle mobile, on la fait passer ensuite sur la poulie correspondante de la moufle fixe, et l'on continue à envelopper de la même manière, avec la corde, toutes les poulies des deux moufles.

Les moufles étant ainsi préparées, on attache la moufle supérieure à un support fixe par la boucle L de sa chape; le crochet N de la moufle mobile sert à suspendre le fardeau que l'on veut élever, et la puissance agit en tirant le prolongement de la corde qui embrasse les poulies.

La disposition des poulies, dans ces dernières moufles, ne permet pas aux cordons d'être parallèles entre eux; mais les inclinaisons sont peu considérables, et elles diminuent à mesure que la distance des moufles augmente; on peut négliger ces petites inclinaisons, et considérer les cordons comme les directions d'autant de forces parallèles et égales entre elles. Les conditions d'équilibre seront les mêmes que pour les moufles de la première espèce (113); ainsi la puissance devra être égale au quotient du poids du fardeau divisé par le nombre des cordons, ou par le nombre des poulies que renferment les deux moufles.

Il y a six cordons dans les moufles que nous venons de décrire, et par conséquent, la valeur théorique de la puissance sera la sixième partie du fardeau.

Si l'on augmentait le nombre des poulies dans les deux moufles, il en résulterait une diminution dans l'intensité de la puissance; mais cet avantage serait bientôt plus que compensé par les résistances qu'elle aurait à vaincre, et par l'accroissement de l'espace qu'elle devrait parcourir: l'expérience a fait connaître qu'il n'y aurait rien à gagner en employant des moufles composées de plus de quatre poulies, et il n'y en a que deux ou trois dans chacune de celles dont on se sert ordinairement.

Du treuil.

116. Le treuil est formé d'un cylindre *abcd* (*fig.* 65), aux bases duquel sont adaptés deux autres cylindres A et B, d'un plus petit diamètre, que l'on nomme *tourillons;* le cylindre traverse le centre C de la roue CIMK, avec laquelle il est solidement assemblé, de manière que l'axe de la roue et celui du cylindre et de ses tourillons ne forment qu'une même ligne droite.

On place le treuil dans un châssis, qui peut se réduire à deux montants, fixés sur des patins en charpente; ce châssis est placé de manière que l'axe du cylindre soit dans la direction horizontale; ses tourillons entrent librement dans les fentes, ou dans les trous, percés à la partie supérieure de chaque montant. Ce châssis est supprimé dans la figure, elle ne renferme que les parties de la machine qui sont nécessaires pour en expliquer la théorie.

Pour mettre le treuil en activité, on fixe à l'un des points de la surface du cylindre un crochet auquel on attache l'un des bouts d'une corde, dont l'autre bout est attaché au fardeau Q que l'on veut élever. Nous supposerons qu'une autre corde soit fixée par l'un de ses bouts à l'un des points de la

circonférence de la roue; que cette circonférence, creusée en geroge comme une poulie, renferme un nombre de tours de la corde au moins égal au nombre des révolutions que la roue devra faire, pour que le fardeau puisse être élevé à la hauteur de l'emplacement où il doit être déposé. Cette disposition serait embarrassante dans la pratique, mais elle donne le moyen de trouver, de la manière la plus simple, le même résultat théorique que celui qu'on obtient par les procédés qui sont mis en usage et que nous ferons connaître plns loin; maintenant, si l'on applique une puissance P au développement de la corde, sa direction MP étant dans le plan de la roue, elle sera tangente à sa circonférence; cette puissance fera tourner le treuil, et la corde attachée au fardeau Q enlevera ce fardeau en s'enronlant autour du cylindre: cela posé, la question qu'il s'agit de résoudre peut être énoncée de la manière suivante.

117. *Trouver le rapport entre la puissance* P, *qui agit suivant la tangente* MP, *à la circonférence de la roue du treuil, et le poids du fardeau* Q, *attaché à la corde* NQ *qui s'enroule autour du cylindre, lorsque la puissance et le fardeau sont en équilibre.* — La corde NQ, attachée au fardeau, touche la surface du cylindre au point N; menons par ce point, parallèlement au plan de la roue, un plan qui passera par la corde, et qui formera dans le cylindre une section dont le centre sera au point D, où le plan coupera l'axe du cylindre, le rayon DN mené au point de contact sera horizontal; par le centre C de la roue, menons à la surface du cylindre un autre rayon CL, parallèle à DN, et dans une direction opposée, le premier rayon étant en arrière de l'axe et le second en avant: à l'extrémité L du rayon CL, menons la verticale indéfinie FLF', qui sera parallèle à la corde NQ;

appliquons au point L deux forces F et F′, chacune égale au poids du fardeau Q, et qui agissent suivant les directions opposées LF, LF′, de sorte que l'on ait $Q = F = -F'$; l'addition des deux forces F et F′ ne change rien au système, puisque ces deux forces se détruisent.

Menons la ligne droite LN, qui coupera l'axe du cylindre au point E; puisque les deux rayons DN et CL sont égaux et parallèles, les lignes droites CD et LN peuvent être considérées comme deux diagonales d'un parallélogramme, et par conséquent ces lignes se coupent mutuellement en deux parties égales au point E.

Les deux forces égales et parallèles Q et F, ont pour résultante une force $R = Q + F = 2Q$; cette résultante est détruite par la résistance des points d'appui, puisque son point d'application E, milieu de la droite LN, est sur l'axe du cylindre; ainsi il ne reste que les deux forces P et F′.

On peut considérer le rayon MC de la roue, et le rayon CL du cylindre, comme un levier angulaire MCL, dont le point d'appui C est sur l'axe du treuil.

Puisque les forces P et F′, appliquées au levier MCL, ont leurs directions MP et LF′, respectivement perpendiculaires aux bras MC et CL de ce levier, on aura (21)

$$P : F' :: CL : CM;$$

mais la force $F' = Q$, et le rayon $CL = DN$; en substituant ces valeurs, la proportion devient

$$P : Q :: DN : CM.$$

C'est-à-dire que lorsqu'une puissance met un fardeau en équilibre par le moyen d'un treuil, la puissance est au poids

du fardeau comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.

La puissance qui agit sur la roue d'un treuil a le plus grand avantage possible lorsque sa direction est tangente à la circonférence de la roue; en effet, si la puissance appliquée au point M de la circonférence de la roue agissait suivant une autre direction que celle de la tangente MP, la direction de la force couperait la surface de la roue, et la perpendiculaire abaissée de son centre C sur cette nouvelle direction, ou le bras de levier de la puissance, serait plus petit que le rayon CM; par conséquent la force qui agirait suivant cette nouvelle direction devrait être plus grande que la force P, qui agit suivant la tangente MP.

118. Rétablissons les forces du système dans leur état primitif, et supposons que le plan qui passe par la corde NQ, et qui forme dans le cylindre une section perpendiculaire à son axe, soit transporté parallèlement à lui-même sur le plan de la roue (*fig.* 66); le rayon DN du cylindre coïncidera avec CN; la puissance P et le fardeau Q pourront être considérés comme deux forces appliquées aux extrémités du levier coudé MCN, suivant les directions MP et NQ, perpendiculaires aux bras de ce levier: dans le cas d'équilibre, les forces P et Q seront réciproquement comme leurs bras de levier, ce qui donne

$$P : Q :: CN : CM;$$

cette proportion est la même que celle que nous avons déjà trouvée: d'où l'on peut conclure que dans le treuil, l'action de la puissance se transmet au fardeau qui doit être élevé, ou à la résistance, comme si la puissance et la résistance agissaient dans le même plan.

D'après ce qui vient d'être démontré sur les conditions d'équilibre dans le treuil, on voit que cette machine revient, pour le fond, au levier de la première espèce, auquel on a ajouté des accessoires qui permettent d'en faire usage pour élever des fardeaux à une grande hauteur, ce qui serait impraticable avec un simple levier.

119. Il y a plusieurs dispositions qui peuvent être employées dans la construction du treuil; la roue qui sert à le mettre en mouvement peut être remplacée par des barres, ou des leviers en bois ou en fer, que l'on fait entrer dans les trous qui traversent le cylindre vers ses extrémités, perpendiculairement à son axe. Cette disposition simplifie le treuil et le rend plus usuel que celui qui est construit avec une roue; on en voit des applications à plusieurs voitures, et principalement aux haquets, qui servent à transporter les marchandises; c'est aussi le moyen employé pour faire tourner le treuil monté dans la chèvre, dont les maçons et les charpentiers font usage dans la construction des bâtiments, pour élever les pierres, les bois et les autres matériaux.

Si les fardeaux que l'on veut élever n'exigent qu'une force médiocre, on adapte une manivelle au bout de chacun des tourillons du cylindre, et des hommes font tourner le treuil en appliquant leurs forces à ces manivelles.

La règle que nous avons trouvée, pour calculer l'équilibre du treuil construit avec une roue à laquelle la puissance est appliquée, convient à toutes les autres dispositions dans la manière d'appliquer la puissance à cette machine; il n'y a qu'à remplacer le rayon de la roue, qui forme le quatrième terme de la proportion générale (**118**), par la distance de l'axe au point d'application de la puissance, c'est-à-dire par la longueur du levier, ou par le rayon de la manivelle.

120. *Trouver les pressions que supportent les appuis, ou les coussinets sur lesquels sont placés les tourillons* A *et* B, *lorsque les forces appliquées au treuil sont en équilibre.* — Pour trouver ces pressions, il faut décomposer chacune des forces qui agissent sur le treuil en deux autres, de manière que l'une des composantes soit appliquée au tourillon A et l'autre au tourillon B.

Le poids du fardeau Q a été remplacé par une force $R = 2Q$, appliquée au point E de l'axe du cylindre, et une force $F'' = Q$, appliquée au point L, agissant suivant la direction LF', inverse de la pesanteur.

Les directions des forces P et F' (*fig.* 66) étant prolongées, elles se rencontrent en un point *g*. Soient *gh* et *ge*, les droites qui représentent ces forces, leur résultante sera représentée par la diagonale *fg* du parallélogramme *gefh*, et le prolongement de cette diagonale devra passer par le centre C de la roue : prenons ce centre pour le point d'application de la résultante des forces P et F', et décomposons cette résultante en ses composantes dirigées suivant CP' et CF'', parallèles à MP et LF' (*fig.* 65 et 66) ; au lieu des deux forces P et Q, qui étaient appliquées aux points M et N, nous aurons la force $R = 2Q$, appliquée au point E de l'axe fixe, et les deux forces $P' = P$ et $F''' = Q$, appliquées au point C du même axe : maintenant, il ne s'agit plus que de décomposer chacune de ces forces en deux autres dont les directions lui soient parallèles, et qui soient appliquées aux points où les tourillons A et B pressent les appuis ou les supports.

Nous supposerons, pour simplifier les calculs, que la force P' ou P agit suivant la direction verticale, c'est-à-dire que nous considérerons cette force comme un poids ; alors les deux forces P et Q, appliquées au point C, et qui agissent

en sens contraire, se réduiront à une seule force Q — P, qui agira dans la direction CF'' de la plus grande, cette direction est verticale et en sens contraire de la pesanteur.

En décomposant la force R, ou 2Q, qui est appliquée au point E de l'axe du cylindre, en deux autres forces U et V qui lui soient parallèles, de manière que la première composante U soit appliquée au tourillon A et la seconde V au tourillon B, on aura

$$AB : BE :: 2Q : U;$$

le premier conséquent de cette proportion peut être transformé de la manière suivante:

$$BE = BD - DE = BD - \tfrac{1}{2}DC = BD - \tfrac{1}{2}(BD - BC)$$
$$= \tfrac{1}{2}(BD + BC).$$

En mettant cette valeur à la place de BE, la proportion devient

$$AB : \tfrac{1}{2}(BD + BC) :: 2Q : U = \frac{(BD + BC).Q}{AB}.$$

L'autre composante est déterminée par la proportion

$$AB : AE :: 2Q : V,$$

dont le conséquent du premier rapport

$$AE = AC - CE = AC - \tfrac{1}{2}DC = AC - \tfrac{1}{2}(AC - AD)$$
$$= \tfrac{1}{2}(AC + AD);$$

la substitution de cette valeur à la place de AE donnera

$$AB : \tfrac{1}{2}(AC + AD) :: 2Q : V = \frac{(AC+AD).Q}{AB}.$$

On trouvera les composantes U′ et V′, de la force Q — P appliquée au point C, par les proportions suivantes :

$$AB : BC :: Q - P : U' = \frac{BC.(Q-P)}{AB},$$
$$AB : AC :: Q - P : V' = \frac{AC.(Q-P)}{AB}.$$

Soit X la résultante des forces que nous venons de transporter au tourillon A, et Y celle des forces qui agissent sur le tourillon B; en observant que les composantes de la force Q — P sont dirigées en sens contraire de la pesanteur, on aura les formules suivantes pour calculer les pressions produites sur les supports du treuil par les forces qui lui sont appliquées :

$$X = U - U' = \frac{(BD+BC).Q - BC(Q-P)}{AB} = \frac{BD\times Q + BC\times P}{AB},$$
$$Y = V - V' = \frac{(AC+AD).Q - AC(Q-P)}{AB} = \frac{AD\times Q + AC\times P}{AB}.$$

Ces formules peuvent être énoncées de la manière suivante : la pression de l'un des tourillons sur son appui, est égale au quotient de la somme des produits du fardeau et de la puissance par les parties de l'axe comprises entre chacune de ces forces et l'autre tourillon, divisée par la longueur de l'axe.

121. Pour avoir les pressions totales sur les supports, il faut ajouter aux formules précédentes les pressions produites

par le poids du treuil, que l'on pourrait considérer comme une force verticale appliquée à son centre de gravité; mais il sera plus facile de calculer séparément le poids du cylindre et celui de la roue.

Représentons par Q' le poids du cylindre, que l'on peut considérer comme une force verticale qui a son point d'application au milieu de l'axe AB, et dont les composantes appliquées aux tourillons A et B, sont chacune de $\frac{1}{2}Q'$.

Soit Q'' le poids de la roue, appliqué à son centre de gravité C; cette force étant décomposée en deux autres, elle donnera $\frac{BC \times Q''}{AB}$ et $\frac{AC \times Q''}{AB}$, pour ses composantes qui agissent sur les tourillons A et B.

En ajoutant $\frac{BC \times Q''}{AB} + \frac{1}{2}Q'$ à la valeur de X, et $\frac{AC \times Q''}{AB} + \frac{1}{2}Q'$ à celle de Y, les formules qui expriment les pressions deviennent

$$X = \frac{BD \times Q + BC.(P + Q'')}{AB} + \frac{1}{2}Q',$$

$$Y = \frac{AD \times Q + AC.(P + Q'')}{AB} + \frac{1}{2}Q'.$$

Ces formules renferment les quantités BD et AD, qui ne sont pas constantes, parce que la position du point D change à chaque tour de la corde sur le cylindre.

Si l'on ajoute membre à membre les deux formules précédentes, on aura

$$X + Y \quad Q + P + Q'' + Q';$$

c'est-à-dire que la somme des pressions, sur les deux supports, est égale à la somme des forces appliquées au treuil, plus le poids du treuil.

122. Nous avons supposé qu'un seul moteur, ou une seule puissance P, appliquée tangentiellement à la roue du treuil, met en équilibre un fardeau Q, attaché à la corde qui s'enroule sur le cylindre, et nous avons trouvé la proportion

$$P : Q :: DN : CM,$$

d'où l'on tire $\quad CM \times P = DN \times Q.$

Le premier membre de cette équation est le moment de la puissance, et le second membre exprime le moment du fardeau; donc, lorsque deux forces appliquées au treuil sont en équilibre, les moments de ces forces sont égaux entre eux.

Si le fardeau était mis en équilibre par un nombre quelconque de puissances appliquées à la roue du treuil, la somme des moments de toutes ces puissances serait égale au moment du fardeau.

Les cordes que l'on emploie dans le treuil ont des diamètres assez grands pour que l'on doive y avoir égard en calculant le rapport de la puissance au fardeau, ou à la résistance, lorsque l'équilibre existe entre ces deux forces. Considérons seulement la corde NQ, à laquelle le fardeau Q est attaché, et qui s'enroule autour du cylindre; on peut supposer ce fardeau suspendu à l'axe de la corde, dont la distance à la surface du cylindre est égale à la moitié de son diamètre: ainsi dans la proportion

$$P : Q :: DN : CM,$$

au lieu du rayon DN du cylindre, il faut prendre DN + le demi-diamètre, ou le rayon de la corde, ce qui diminue l'avantage de la puissance.

Du cabestan.

123. On appelle *cabestan* un treuil dont le cylindre *abcd* (*fig.* 67) est vertical; ce cylindre est placé dans un châssis en charpente DEAFF'E' qui se nomme chèvre; le tonrillon B du cylindre entre librement dans un trou percé au milieu du madrier qui joint les pièces inférieures de la chèvre, et le tourillon A, dont le diamètre est plus grand que celui du tourillon B, est arrêté par l'entaille demi circulaire d'un autre madrier contre lequel il bnte dans le sens du fardeau, ou de la résistance; sur le prolongement du tourillon A, on a taillé un parallélépipède, ou un prisme *efh*, qui forme la tête du cabestan; elle est percée de deux trous carrés l'un au-dessus de l'autre, perpendiculaires entre eux, pour faire passer les barres, ou leviers, avec lesquels on fait tourner le cylindre; cette tête est consolidée par deux frettes en fer, l'une au-dessus et l'autre au-dessous des trous, pour la rendre capable de résister à la pression produite par les forces, ou puissances, que l'on applique aux leviers.

Il est facile de transporter le cabestan et de lui donner la position convenable pour l'appliquer au transport des grands blocs de pierres, ou d'autres fardeaux très lourds, soit sur un sol horizontal, soit sur des plans inclinés; dans tous les cas, la chèvre doit être solidement arrêtée. Le moyen qu'on emploie ordinairement pour cet objet, consiste à enfoncer un pieu K dans le sol; on attache ensuite la chèvre à ce pieu avec une corde à laquelle on fait faire plusieurs tours qui enveloppent le pieu et les pieds de derrière de la chèvre.

Lorsque le poids du fardeau Q que l'on veut transporter n'est pas très grand, on l'élève avec des leviers pour le placer

sur des rouleaux, et l'on passe autour de ce fardeau un cordage auquel on attache l'un des bonts de la corde qui doit s'enrouler sur le cylindre dn cabestan.

Pour mettre le cabestan en activité, il faut d'abord placer la corde sur le cylindre; on lui fait faire trois tours sur elle-même, de manière que chaque tour forme un cercle d'un diamètre un peu plus grand que celui du cylindre; on place cet assemblage de cercles concentriquement sur le trou dans lequel doit entrer le tourillon B, ensuite on met le cylindre dans la chèvre; alors un homme assis par terre tire la corde en I, du côté opposé au fardeau, pendant que d'autres hommes appliquent leurs forces vers les extrémités des leviers, pour tourner le cylindre; à mesure que la corde s'enroule autour du cylindre, en faisant avancer le fardeau vers le cabestan, l'ouvrier qui est assis par terre la déroule, en la tirant dans le sens opposé, et il peut continuer cette manœuvre sans éprouver une trop grande fatigue; cet ouvrier n'exerce qu'uue tension médiocre sur la corde, mais cette tension, ajoutée au frottement des trois tours qui sont enroulés sur le cylindre, produit une résistance suffisante pour contre-balancer l'action des ouvriers qui sont appliqués aux leviers.

124. Les conditious d'équilibre du cabestan sont les mêmes que celles du treuil: ces deux machines sont fondées sur le même principe, et la proportion que nous avons trouvée pour l'équilibre de la seconde peut être appliquée directement à la première.

Supposons que les quatre forces P, P′, P″ et P‴, appliquées aux leviers, soient égales entre elles, que la direction de chacune de ces forces soit horizontale et perpendiculaire à son bras de levier, et que la longueur de chacun des quatre leviers soit égale à R, en désignant par r le rayon du cylindre *abcd*,

autour duquel s'enroule la corde attachée au fardeau Q, qu'il s'agit de transporter, on aura (117)

$$4P : Q :: r : R, \quad R \times 4P = r \times Q;$$

d'où l'on tire

$$4P = \frac{r}{R} \times Q.$$

Cette formule fait voir qne lorsque l'équilibre a lieu dans le cabestan, la somme des forces appliquées aux leviers est égale au produit du poids du fardeau par le quotient du rayon du cylindre divisé par la longueur de l'un des leviers aux extrémités desquels les forces agissent, ces leviers étant supposés égaux entre eux.

La longueur du levier est la distance de l'axe du cylindre au point d'application de la puissance; si la puissance appliquée à chaque levier agit sur plusieurs points semblablement placés, par exemple, si chaque levier est poussé par deux hommes, on prendra pour la valeur de R, la moyenne distance de l'axe du cylindre aux quatre points où les mains de ces deux hommes sont appliquées.

En substituant des nombres aux lettres, pour effectuer les calculs indiqués dans la formule, il faut observer que le rayon de la corde doit être ajouté au rayon r du cylindre, parce que la résistance du fardeau peut être censée produire son effet suivant l'axe de la corde.

Dans le cabestan représenté en perspective (*fig.* 67), chacune des branches de la chèvre DEAF, E'F', est formée d'une pièce de bois courbe: c'est la forme la plus ordinaire des cabestans employés à Paris, principalement sur les divers ports de la Seine, pour décharger les grosses pierres,

et quelques autres objets très lourds, qui arrivent dans les bateaux.

On construit aussi des cabestans dont les chèvres ne renferment que des pièces droites, comme celui qui est représenté par deux projections (*fig*. 68 et 69): c'est le dessin de l'un des cabestans qui ont été employés pour les travaux de la gare de Saint-Ouen.

125. Dans les applications ordinaires du cabestan, le fardeau est lié vers le milieu de sa hauteur, parallèlement à sa base, avec une corde à laquelle on attache le câble qui s'enroule autour du cylindre, comme on le voit représenté dans la *fig*. 67; mais lorsque le fardeau est composé d'une matière dont la résistance peut supporter une grande pression, par exemple, lorsqu'il s'agit de transporter un bloc de marbre, le cordage qui forme un lien autour du fardeau, peut être remplacé par l'assemblage des pièces de fer qui forment un mécanisme dont les *fig*. 69^a et 69$^{a'}$ représentent le plan et l'élévation.

Pour employer ce mécanisme, on creuse d'abord dans le bloc, à l'endroit où la puissance doit être appliquée, un trou dont l'ouverture est de 4 pouces de large sur 3 pouces de hauteur, et la profondeur d'environ 5 pouces; la largeur du fond est plus grande que celle de l'ouverture, de sorte que la forme de ce trou est celle d'un prisme quadrangulaire dont les deux bases sont des trapèzes égaux. On place les deux pièces *b*, *b*, dans le trou, en les appliquant contre les parois latérales, et l'on remplit l'espace qui les sépare par les coins *c*, *c*, *c*, ce qui forme une queue d'aronde qui résiste à la traction; on attache à cette queue d'aronde le câble qui s'enroule sur le cylindre du cabestan, soit par le moyen d'un S, comme on le voit dans la *fig*. 69, soit directement à la pièce

courbe *d*, qui forme une anse dont les crochets des deux branches embrassent les parties saillantes *e*, *e*, du boulon qui traverse la partie extérieure de la queue d'aronde.

Lorsqu'on veut transporter un fardeau très lourd avec le cabestan, on ne peut pas se servir de rouleaux, comme l'indique la *fig.* 67; ils seraient écrasés par la pression, ou bien ils s'enfonceraient dans le sol; pour éviter ces inconvénients, on place le fardeau sur deux madriers qui glissent sur des planches posées en travers et enduites de savon, pour diminuer le frottement; cette disposition est représentée dans la *fig.* 69.

126. Nous avons observé qu'à mesure que la corde attachée au fardeau s'enroule sur le cylindre du cabestan, un ouvrier, assis par terre, tire cette corde et la déroule du côté opposé au fardeau; ainsi la corde fait toujours le même nombre de tours sur la surface du cylindre, mais elle en parcourt successivement toute la longueur, soit en montant, soit en descendant, suivant que la partie qui s'enroule est au-dessus ou au-dessous de celle qui se déroule.

Lorsque la partie de la corde qui s'enroule sur le cylindre est parvenue à l'une de ses bases, par exemple à la base supérieure, il faut arrêter la rotation du cylindre et le dévirer un peu, pour donner du mou à la corde et la faire descendre au bas du cylindre; alors on recommence à tourner comme auparavant.

Cette opération, que les ouvriers appellent *choquer,* doit être répétée souvent, ce qui fait perdre un temps considérable; si le cabestan est appliqué pour élever un fardeau verticalement, ou sur un plan incliné, alors chaque fois que l'on doit choquer il faut arrêter le fardeau : on se sert ordinairement d'un cordage attaché à un point fixe, on entortille

le câble auquel est attaché le fardeau avec ce cordage auxiliaire: c'est ce que les marins appellent *bosser,* ou prendre des bosses.

127. Malgré les imperfections qui résultent de la nécessité de choquer et d'arrêter le fardeau, soit en prenant des bosses, soit par d'autres moyens, le cabestan que nous venons de décrire est une machine fréquemment employée, parce qu'elle peut être construite à peu de frais, et qu'elle offre un moyen simple pour favoriser la puissance et économiser la force dans le transport des grands fardeaux; cependant on doit observer qu'il y a de l'avantage à employer une force suffisamment grande, appliquée directement au fardeau, lorsque les circonstances le permettent et que la distance à parcourir est un peu considérable: c'est ce qui sera rendu sensible par l'expérience suivante, rapportée par Rondelet dans son *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*.

Les deux grosses pierres qui forment les angles du fronton de la nouvelle église de Sainte-Geneviève, maintenant le Panthéon français, pesaient chacune 53 milliers; elles ont été transportées du port des Invalides à Sainte-Geneviève, en passant par les boulevarts: l'une de ces pierres, ou l'un de ces blocs étant chargé sur un chariot, pour lui faire parcourir cette distance, qui est d'environ 2600 toises, on s'est servi de deux cabestans tournés chacun par huit hommes qui se relayaient de deux heures en deux heures; le trajet a été fait en onze jours et sept nuits, et la dépense, pour les journées d'ouvriers seulement, s'est élevée à la somme de 768 livres. L'autre bloc a été conduit sur le même chariot par 63 chevaux attelés trois à trois et douze voituriers; le trajet n'a duré que trois heures, et la dépense a été de 425 livres ou $419^{f}75^{c}$.

Dans le transport du premier bloc, les hommes appliqués aux cabestans lui ont fait parcourir $\frac{2600}{18} = 144$ toises $\frac{1}{2}$ par jour; si l'on ajoute les frais d'équipage à la somme de 758f52c payée aux ouvriers, la dépense sera à peu près double de ce qu'a coûté le *transport* du second bloc, qui a été transporté par des chevaux.

128. La statue équestre de Louis XIII, qui avait été élevée au milieu de la place Royale, ayant été détruite, pendant les troubles de la Révolution, on avait établi à la même place un bassin entouré de marroniers, au milieu duquel s'élevaient des jets d'eau qui formaient une très belle gerbe; après le retour des Bourbons, on a voulu successivement rétablir les monuments de l'ancienne monarchie, et en 1824 le Gouvernement a fait venir le bloc de marbre qui devait servir à sculpter une nouvelle statue équestre de Louis XIII, pour remplacer l'ancienne: suivant un article inséré dans *le Moniteur* du 1er décembre, ce bloc, qui venait d'arriver au port de la Grève, est le plus considérable qui ait été tiré des mines de Carrare; il avait 14 pieds de hauteur sur 14 pieds de large et 5 pieds d'épaisseur; son poids était de 110 milliers: ces mesures ne s'accordent pas exactement avec celles que j'ai prises moi-même, et d'après lesquelles j'ai calculé le volume et le poids par approximation, comme on le verra ci-après.

On pouvait considérer ce bloc de marbre comme étant composé de deux parties, dont l'une était le parallélépipède rectangle qui formait sa base, et qui avait 13 pieds de longueur sur 6 pieds 6 pouces de largeur et 5 pieds d'épaisseur; l'autre partie, d'une forme irrégulière, qui s'élevait au-dessus de cette base, avait environ 8 pieds de hauteur.

Le parallélépipède qui forme la base du bloc a pour mesure

$$13 \times 6,5 \times 5 = 422,5 \text{ pieds cubes};$$

supposons que le volume de la partie qui s'élève au-dessus de ce parallélépipède en est les $\frac{2}{5}$ ou les $\frac{4}{10}$, on aura, pour la solidité des deux parties, ou du bloc entier,

$$422,5 + 0,4 \times 422,5 = 591,5 \text{ pieds cubes}.$$

Le pied cube de marbre de Carrare pèse $190^{lb}\,2^{o}\,6^{g}\,38^{g} = 190^{lb},176$ poids de marc; en multipliant ce dernier nombre par celui qui exprime la solidité du bloc, en pieds cubes, on trouvera que son poids est de 112 489 livres.

Après avoir déchargé ce bloc du bâteau dans lequel il avait été amené sur le port de la Grève, on l'a placé de champ, dans le sens de sa longueur, sur deux madriers qui formaient une espèce de traîneau, posé perpendiculairement sur trois ou quatre planches enduites de savon aux endroits où le contact avait lieu; la base, ou le parallélépipède, était en avant; la partie élevée sur cette base était couchée par derrière. Le bloc était fixé sur les madriers avec une corde qui faisait plusieurs tours sur la partie postérieure à sa base, en allant d'un madrier à l'autre.

On avait percé, dans la base du bloc, deux trous afin d'y placer des queues d'aronde semblables à celles que nous avons décrites et qui sont représentées (*fig.* 69^{a} et 69^{b}), pour attacher les équipages avec lesquels on devait le transporter. Ces équipages consistaient en deux cabestans tournés chacun par huit hommes; mais, pour rendre cette force motrice capable de traîner un aussi lourd fardeau, on a employé des

poulies; pour l'un des cabestans, il y avait deux poulies mobiles l'une à la suite de l'autre, attachées à la queue d'aronde qui lui correspondait, et une poulie fixe attachée au cabestan; la corde étant attachée à la chèvre du cabestan, elle passe dans la gorge de la poulie mobile qui est attachée immédiatement, par le moyen d'une bride, à la queue d'aronde; elle passe ensuite sur la poulie fixe, elle revient embrasser la deuxième poulie mobile attachée à la suite de la première, et ensuite elle va s'enrouler autour du cylindre du cabestan. Il n'y avait qu'une seule poulie mobile au deuxième cabestan.

En faisant abstraction de la résistance produite par le frottement et la résistance des cordes, chaque poulie mobile doublait la force des hommes appliqués aux cabestans, et par conséquent cette force était quadruple dans le premier cabestan et double dans le second, de ce qu'elle aurait été sans l'intermédiaire des poulies mobiles; mais la vitesse du fardeau était ralentie dans la même proportion.

Le bloc était sur le quai des Ormes, en face de la Pompe à feu, le 12 février 1825; pour le conduire à la place Royale, on l'a traîné par les rues des Nonandières, Saint-Antoine, Culture-Sainte-Catherine et rue Neuve-Sainte-Catherine; ce trajet, qui est d'environ 455 toises, a été fait en huit jours, ce qui donne une vitesse d'à peu près 57 toises par jour.

129. Lorsque les applications du cabestan n'exigent pas qu'il soit successivement transporté à différentes stations, sa construction est différente de celle que nous avons décrite; on supprime la chèvre, et le corps du cabestan tourne autour d'un arbre vertical en fer: c'est une espèce d'essieu dont la base est solidement fixée. La partie du cabestan sur la-

quelle s'enroule la corde, qui se nomme la *fusée*, n'est pas cylindrique; elle est de la forme d'un tronc de cône, dout le plus grand diamètre est celni de la base inférieure.

Si la force motrice doit être plus grande que celle de huit hommes, appliqués aux quatre leviers formés par les deux barres qui traversent la tête du cabestan, on taille la partie supérieure de la fusée en parallélépipède qui entre dans le trou carré percé au milien d'un plateau à six, huit ou un plus grand nombre de faces latérales; chacune de ces faces est percée d'nn trou carré, dans lequel on fait entrer un levier.

130. C'est principalement à bord des vaisseaux que l'on fait usage du cabestan, pour lever les ancres et pour diverses autres manœuvres dans lesquelles il est indispensable; une machine aussi importante devait engager les géomètres et les ingénieurs mécaniciens à faire des recherches ponr en corriger les imperfectious; leur zèle a encore été stimulé par l'Académie des Sciences, qui a contribué plus qu'aucune autre société savante aux progrès de toutes les connaissances utiles. Le prix qu'elle proposa pour l'année 1739, et qui fut remis au conconrs en le doublant, pour n'être distribué qu'en 1741, avait pour objet de trouver un cabestan qui eût les avantages de l'ancien, sans en avoir les défauts. Le principal de ces défauts est celui qui oblige de choquer, lorsque la corde, en s'enroulant autour dn cylindre, est parvenne à l'une de ses bases; mais, pour le corriger, les concnrrents n'ont présenté que des moyens qui auraient d'autres inconvénients: ainsi la question n'a pas été complétement résolue. Cependant, l'Académie ayant reconnu que les Mémoires qui lui ont été envoyés renferment de très bonnes choses, surtout pour ce qui concerne la théorie, elle a décerné le prix à quatre de

ces Mémoires, trois autres ont obtenu des accessits, et en 1745 on a publié la collection de ces sept Mémoires en un volume in-4°. D'autres recherches qui ont été faites depuis cette époque, en France et en Angleterre, ont produit plusieurs nouveaux cabestans pour l'usage de la marine; la perfection avec laquelle on construit ceux qui servent maintenant, et l'adresse des hommes qui les appliquent aux manœuvres, suffisent à tous les effets pour lesquels ils sont établis. La carrière des améliorations n'en reste pas moins ouverte aux recherches des mécaniciens jaloux de faire mieux que leurs prédécesseurs.

Les petits navires n'ont qu'un seul cabestan: celui du bateau à vapeur *le Souffleur,* dont la longueur est de 45 mètres, est placé un peu en arrière du milieu, à une petite distance du grand mât, à la suite duquel sont les deux machines de la force de 80 chevaux chacune. Dans les grands vaisseaux de guerre il y a deux cabestans: l'un est simple comme celui des petits navires, et l'autre, qui se nomme le grand cabestan, a deux fusées; leurs centres sont traversés par un arbre en fer forgé dont la partie inférieure tourne dans une crapaudine qu'on appelle saucier; la fusée supérieure est sur le pont et l'inférieure est dans l'entre-pont; la tête de chaque fusée est formée d'un plateau percé de trous perpendiculaires à l'axe, dans lesquels on fait entrer des leviers, de sorte que l'on peut y appliquer un assez grand nombre d'hommes pour élever des fardeaux du poids de quatre ou cinq tonneaux.

131. Le chemin, ou l'espace, parcouru par la puissance appliquée au treuil ou au cabestan, est à l'espace parcouru par le fardeau, pendant le même temps, comme le poids du fardeau est à la puissance.

Désignons par E et e les espaces parcourus par la puissance P et par le fardeau Q.

Pendant que la puissance parcourt la circonférence décrite par le rayon de la roue, le fardeau parcourt une ligne égale à la circonférence du cylindre; par conséquent les espaces parcourus par la puissance et par le fardeau sont entre eux comme les circonférences de la roue et du cylindre; mais les circonférences sont entre elles comme les rayons: ainsi, en désignant par R le rayon de la roue et par r celui du cylindre, on aura la proportion

$$E : e :: R : r;$$

d'ailleurs, lorsque la puissance et le fardeau sont en équilibre, on a

$$Q : P :: R : r.$$

Ces deux proportions ayant un rapport commun, les deux autres rapports sont égaux entre eux, ce qui donne

$$E : e :: Q : P.$$

On voit par cette proportion, que si le fardeau Q augmente, la puissance P restant la même, l'exposant du rapport des espaces parcourus augmentera pareillement, soit par l'accroissement de l'espace E, soit par la diminution de l'espace e; d'où il résulte que si l'on veut favoriser la puissance, il faut augmenter l'espace qu'elle parcourt, ou diminuer l'espace que parcourt le fardeau: c'est une loi à laquelle sont assujéties toutes les machines.

Le treuil et le cabestan offrent l'avantage de pouvoir em-

ployer une puissance médiocre, soit pour élever un fardeau très pesant, soit pour vaincre une résistance considérable; mais cet avantage est subordonné à des conditions qui ne permettent pas de l'étendre au-delà de certaines limites, car si la puissance peut être ménagée, de sorte qu'elle ne soit pas obligée de faire un effort plus grand que celui qu'elle peut produire sans trop de fatigue, on ne doit pas non plus donner une trop grande longueur au rayon de la roue, ou au levier sur lequel cette puissance agit, afin que l'espace qu'elle aura à parcourir ne soit pas d'une trop grande étendue.

152. Un treuil avec une roue d'un grand diamètre, est une puissante machine; mais elle serait trop embarrassante pour les applications usuelles, et il peut être utile de chercher si l'on ne pourrait pas la remplacer par un assemblage de plusieurs petits treuils, qui seraient capables de produire le même effet que celui qu'on obtient en employant un treuil construit sur de grandes dimensions.

Soient A, A′, A″ (*fig.* 70), un assemblage de trois treuils, disposés de manière que les axes de leurs cylindres soient parallèles entre eux, et que l'action de la puissance P, appliquée à la corde BP, tangente à la roue du premier treuil A, soit transmise à la résistance Q, attachée à la corde D″Q, qui s'enroule sur le cylindre du troisième treuil A″, par le moyen des cordes DB′ et D′B″, dont la première va du cylindre du premier treuil à la roue du deuxième, et la seconde passe du cylindre du deuxième treuil sur la roue du troisième.

Le système de ces trois treuils étant en équilibre, les forces appliquées à chaque treuil doivent aussi être en équilibre. Ainsi, en désignant par Q′ la tension de la corde DB′, qui s'enroule sur le cylindre du treuil A, l'équilibre de ce treuil don-

nera la proportion

$$P : Q' :: CD : CB;$$

en désignant par Q″ la force qui exprime la tension de la corde D′B″, on aura pour l'équilibre du treuil A′

$$Q' : Q'' :: C'D' : C'B',$$

et pour l'équilibre du treuil A″, auquel sont appliquées les forces Q″ et Q,

$$Q'' : Q :: C''D'' : C''B''.$$

En multipliant ces trois proportions terme à terme, et négligeant les facteurs communs aux deux termes du premier rapport, il viendra

$$P : Q :: CD \times C'D' \times C''D'' : CB \times C'B' \times C''B''.$$

Quel que soit le nombre des treuils, on trouvera un résultat semblable, d'où il résulte que dans l'équilibre d'un assemblage de treuils, disposés comme ceux que nous venons de décrire, la puissance qui agit suivant la tangente à la roue du premier treuil est au poids du fardeau attaché à la corde qui s'enroule sur le cylindre du dernier treuil, comme le produit des rayons de tous les cylindres de ces treuils est au produit des rayons de toutes leurs roues.

La proportion que nous venons de trouver donne la formule suivante :

$$P = \frac{CD \times C'D' \times C''D''}{CB \times C'B' \times C''B''} \times Q.$$

Si dans chacun de ces treuils le rayon du cylindre était un

cinquième du rayon de la roue, cette formule deviendrait

$$P = \frac{1}{125} Q.$$

La puissance serait $\frac{1}{125}$ du fardeau, c'est-à-dire qu'un poids de 1 kilogramme appliqué à la roue du treuil A ferait équilibre à un poids de 125 kilogrammes suspendu à la corde qui s'enroule sur le cylindre du treuil A″; mais pour produire cet effet, la puissance devrait parcourir un espace de 125 mètres, tandis que le fardeau ne serait élevé qu'à la hauteur de 1 mètre (**131**); la longueur que devrait avoir la corde par laquelle la puissance agit sur le premier treuil, est un inconvénient qui ne permet pas de se servir du treuil composé, pour produire de grands effets avec une puissance médiocre; on en fait des applications très utiles pour établir la communication du mouvement d'un arbre avec un autre arbre qui est dans le même plan, et l'on a trouvé le moyen de faire usage du même principe en supprimant l'emploi des cordes, comme on le verra dans l'article suivant.

Des roues dentées.

133. On appelle roue dentée, celle dont la circonférence est garnie de parties saillantes, égales entre elles et également espacées, que l'on nomme dents; les vides compris entre les dents d'une roue reçoivent successivement les dents d'une autre roue qui engrène avec la première, lorsqu'une puissance appliquée à l'une de ces roues lui communique le mouvement de rotation et fait tourner l'autre roue en sens contraire; on dit alors que la roue sur laquelle agit la puissance mène la roue avec laquelle elle engrène.

Dans un grand nombre de machines, on applique la puissance, par le moyen d'une roue ou d'une manivelle, à une petite roue dentée que l'on nomme pignon, dont les dents engrènent dans celles d'une roue dentée; l'avantage de la puissance sera d'autant plus grand que le rayon, on le diamètre du pignon, sera contenu un plus grand nombre de fois dans celui de la roue. Il serait sonvent difficile d'employer une seule roue dentée d'un diamètre assez grand pour donner à la puissance l'avantage qu'elle doit avoir, ou pour satisfaire à d'autres conditions, soit par la difficulté de construire cette roue, soit par insuffisance d'espace, lorsque celui dont on peut disposer ne serait pas assez grand pour la contenir; alors on peut la remplacer par un assemblage de roues plus petites et de pignons convenablement disposés pour l'effet que cet engrenage doit prodnire.

Il est facile de trouver les conditions d'équilibre entre une puissance et le poids d'un fardeau, appliqués à un système de roues dentées, comme celui que nous venons d'indiquer.

134. Soit le système de roues dentées (*fig.* 71) composé d'un pignon N, dont les dents engrènent dans celles de la roue M'; l'arbre de cette roue porte le pignon N' qui engrène dans la roue M'', dont l'arbre porte le cylindre N'', autour duquel s'enroule une corde à laquelle le fardean Q est attaché; les axes ou les arbres de ces roues d'engrenage sont parallèles entre enx, ils tournent dans les coussinets fixés au châssis, qui n'est représenté dans la figure que par les parties AB et DE; une puissance P, appliquée à la manivelle fixée à l'arbre du pignon N, agit suivant la direction P*m* perpendiculaire à cette manivelle, qui peut être considérée comme le rayon d'une roue M, dont la circonférence est décrite par le point auquel la puissance est appliqnée.

Les roues dentées sont une simple modification de l'assemblage de plusieurs treuils, dans lesquels l'action de la puissance appliquée à la roue du premier treuil est transmise aux autres treuils par les cordes qui passent successivement du cylindre d'un treuil à la roue du treuil suivant; les dentures des pignons et des roues remplacent les cordes intermédiaires, et produisent le même effet sans avoir les inconvénients qui ont empêché d'employer ce mode d'assemblage; mais si ce mécanisme n'est pas bon dans la pratique, il offre un moyen facile pour faire connaître la règle que l'on doit employer lorsqu'on veut en calculer les effets; elle est aussi applicable aux roues dentées: d'ailleurs cette règle, qui est fondée sur le principe du levier, peut être démontrée directement de la manière suivante.

Soit R la longueur de la manivelle à laquelle la puissance P est appliquée, ou le rayon de la roue M, et r le rayon du pignon N; ces rayons R et r peuvent être considérés comme les deux bras d'un levier dont le centre de mouvement est sur l'axe commun de la roue M et du pignon N. Si l'on désigne par F la force qui agit à l'extrémité du petit bras de levier, ou du rayon r, la condition d'équilibre sera exprimée par la proportion

$$P : F :: r : R.$$

Les rayons R′, r', de la roue M′ et du pignon N′, forment les deux bras d'un second levier; la force F est appliquée à l'extrémité du rayon R′, et si l'on désigne par F′ la force qui agit à l'extrémité du rayon r', ces deux rayons étant les bras d'un levier en équilibre, on aura

$$F : F' :: r' : R'.$$

En considérant de la même manière les rayons R'', r'', de la roue M'' et du pignon N'', on aura un troisième levier, sur lequel agissent la force F' et le fardeau Q, qui sont en équilibre, ce qui donne

$$F' : Q :: r'' : R''.$$

Ces trois proportions étant multipliées par ordre, en négligeant les facteurs communs aux deux termes du premier rapport, il viendra

$$P : Q :: rr'r'' : RR'R''.$$

C'est-à-dire que la puissance est au poids du fardeau, comme le produit des rayons de tous les pignons est au produit des rayons de toutes les roues.

Le résultat que nous venons de trouver est le même que celui que nous avions obtenu (**132**), pour l'équilibre d'un assemblage de treuils; les rayons des cylindres sont remplacés ici par les rayons des pignons.

135. Les rayons que l'on emploie dans le calcul des engrenages sont terminés aux points de contact des dents qui se poussent; on les nomme *rayons moyens:* il serait souvent difficile de les mesurer avec exactitude, mais on évite cette difficulté en remplaçant le nombre qui exprime la longueur de chaque rayon par le nombre de dents contenues dans la circonférence qu'il décrit; cette substitution ne produit aucun changement dans le résultat, parce que les rayons sont proportionnels aux circonférences, et par conséquent aux nombres de dents que ces circonférences contiennent: ainsi, en désignant par D', D'', les nombres de dents que renferment les roues M', M'', et par d, d', ceux des pignons N, N', et

observant que les rayons R, r'', de la roue M et du cylindre N'', qui n'ont point de dents, doivent être conservés, la proportion précédente deviendra, en changeant l'ordre de ses termes,

$$RD'D'' : r''dd' :: Q : P = \frac{r''dd'}{RD'D''} \times Q.$$

136. Pour appliquer cette formule à un exemple, nous chercherons la valeur de la puissance P, capable de mettre en équilibre un fardeau Q du poids de 3000 kilogrammes, par le moyen d'un système de roues semblable à celui qui est représenté dans la *fig*. 71.

Soient $R = 14$ pouces, le rayon de la manivelle à laquelle la puissance est appliquée, ou le rayon de la roue M;
$r'' = 3$ pouces, le rayon du cylindre N'';
$D' = D'' = 48$, le nombre des dents de chacune des roues égales M' et M'';
$d = d' = 10$, le nombre des dents de chacun des pignons N et N'.

Ces nombres étant substitués à la place des lettres dans la formule générale, il viendra

$$P = \frac{3 \times 10 \times 10}{14 \times 48 \times 48} \times 3000.$$

Les calculs étant effectués, on trouve 27 kilogrammes $\frac{9}{10}$ pour la valeur de la puissance capable de mettre en équilibre un fardeau de 3000 kilogrammes; pour élever ce fardeau, il faudrait augmenter la puissance d'une quantité suffisante pour vaincre les résistances produites par le frottement et la raideur de la corde qui s'enroule sur le cylindre.

Nous avons négligé la grosseur de la corde; supposons que son diamètre soit de 2 pouces $\frac{1}{2}$, il faudra prendre $3 + 1\frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$ pour le rayon du cylindre: les calculs étant refaits d'après cette correction, on trouvera que la puissance capable de mettre le même fardeau en équilibre, doit être de $39^k,527$.

Si la quantité inconnue était le poids du fardeau Q, toutes les autres quantités étant données, on calculerait ce poids par la formule

$$Q = \frac{RD'D''}{r''dd'} \times P.$$

137. *Trouver le rapport entre les espaces parcourus dans le même temps, par la puissance* P, *qui agit suivant la tangente à la circonférence de la roue* M, *et par le fardeau* Q, *attaché à la corde qui s'enroule sur le cylindre* N''. — Pendant que la roue M fait une révolution autour de son axe, le pignon qui est sur le même axe, et qui engrène avec la roue M', ne fait tourner cette roue que d'un arc composé d'un nombre de dents égal au nombre des dents du pignon; ainsi la roue M' ne fera qu'un tour pendant que le pignon N fera un nombre de tours exprimé par le quotient du nombre des dents de la roue divisé par le nombre des dents du pignon.

Si l'on désigne par T le nombre de tours que fait la roue M', et par t le nombre de tours que fait dans le même temps le pignon N, le nombre des dents de ce pignon étant représenté par d, et celui des dents de la roue M' par D', on aura

$$t = \frac{D' \times T}{d}.$$

Cette formule est la traduction algébrique de l'observation que nous venons d'exprimer en langage ordinaire; on en déduit la proportion suivante:

$$t : T :: D' : d;$$

c'est-à-dire que les nombres de tours du pignon N et de la roue M' qui engrènent ensemble, sont en raison inverse des nombres de leurs dents.

Le pignon N' de d' dents fait le même nombre T de tours que la roue M'; il engrène avec la roue M'' de D'' dents. En désignant par T' le nombre de tours que fait cette dernière roue, on aura

$$T : T' :: D'' : d'.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, et négligeant le facteur commun, il vient

$$t : T' :: D'D'' : dd',$$

d'où l'on tire

$$T' = \frac{dd'}{D'D''} \times t.$$

Supposons que la puissance appliquée à la manivelle fixée au pignon N lui fasse faire trente tours par minute, ce qui donne $t = 30$; on a pour les nombres de dents, $d = d' = 10$ et $D' = D'' = 48$. En substituant ces nombres à la place des lettres, la formule deviendra

$$T' = \frac{10 \times 10}{48 \times 48} \times 30.$$

On peut effectuer directement les calculs indiqués, ou bien

se servir des tables de logarithmes; c'est ce dernier moyen que nous allons employer.

log 3000.	3.4771213
2 log 48.	3.3624825
log T'.	0.1146388

$$T' = 1,30208.$$

On voit par cette valeur de T', que la roue M'', ou le cylindre N'', sur lequel s'enroule la corde à laquelle le fardeau Q est attaché, fera un peu moins de $1\frac{1}{3}$ tour par minute.

Le rayon de la manivelle, ou la roue M, que décrit la puissance, est de 14 pouces $= \frac{7}{6}$ pied; ainsi la circonférence de cette roue a pour mesure

$$2 \times 3,1416 \times \frac{7}{6} = 7,3304 \text{ pieds};$$

et par conséquent, dans 1', la puissance parcourt un espace de $30 \times 7,3304 = 219,912$ pieds.

Le rayon du cylindre N'', sur lequel s'enroule la corde qui élève le fardeau, est de $4\frac{1}{4}$ pouces $= \frac{17}{48}$ pied, ce qui donne, pour la longueur de la circonférence,

$$2 \times 3,1416 \times \frac{17}{48} = 2,2253 \text{ pieds};$$

et l'espace que parcourt le fardeau pendant 1', est de

$$1,30208 \times 2,2253 = 2,89752 \text{ pieds}.$$

En comparant le rapport de la puissance au poids du far-

deau avec le rapport des espaces que la puissance et le fardeau parcourent dans une minute, on trouvera que le premier rapport est inverse du second; si le frottement ne faisait pas éprouver de perte à la puissance, elle serait $\frac{39,527}{3000} = 0,013175$ du fardeau; mais celui-ci ne parcourra, dans l'espace d'une minute, que $\frac{2,89752}{219,912} = 0,013175$ de l'espace parcouru dans le même temps par la puissance.

138. *Trouver les nombres de dents que doivent avoir les roues* M′, M″, *et les pignons* N, N′, *qui engrènent dans ces roues, pour former un engrenage tel que si le premier pignon* N *fait* 30 *tours dans une minute, la dernière roue* M″ *fasse* 8 *tours dans le même temps.* — La figure et la notation des quantités que nous allons employer, sont les mêmes que celles du problème précédent, qui a beaucoup d'analogie avec celui qui vient d'être énoncé, dont la solution pourrait être abrégée; mais nous allons chercher directement l'équation, en reprenant l'analyse de la manière suivante.

Nous observerons d'abord que le pignon N ayant d dents, chaque tour qu'il fait autour de son axe il engrène d dents de la roue M′, et qu'après avoir fait t tours il a engrené $t \times d$ dents; nous remarquerons ensuite que dans une révolution de la roue M′, qui a D′ dents, cette roue engrène D′ dents du pignon N, et qu'après avoir fait T tours, elle a engrené $T \times D'$ dents; mais dans le même temps, le nombre des dents du pignon, engrenées dans la roue, est égal au nombre des dents de la roue engrenées dans le pignon, ce qui donne

$$t \times d = T \times D'.$$

Le pignon N′ qui engrène dans la roue M″ donnera, d'après

un raisonnement semblable,

$$T \times d' = T' \times D'';$$

en multipliant la première équation par la seconde et négligeant le facteur commun, il viendra

$$tdd' = T'D'D''.$$

Cette équation est la même que celle du dernier problème; elle peut être écrite de la manière suivante:

$$\frac{t}{T'} = \frac{D'D''}{dd'}.$$

C'est-à-dire que le rapport des nombres de tours que font dans le même temps, le premier pignon N et la dernière roue M'', est égal au rapport composé des nombres de dents que renferment les deux roues M', M'', et les deux pignons N et N'.

La proportion que nous venons de trouver pour deux roues et deux pignons, aurait lieu pour un engrenage composé d'un nombre quelconque de roues et d'un nombre égal de pignons.

D'après l'énoncé du problème, on connaît t et T'; en substituant les valeurs de ces lettres dans la dernière formule, on aura

$$D'D'' = \frac{30dd'}{8};$$

si l'on suppose que le produit $dd' = 10 \times 10$, cette formule donnera

$$D'D'' = \frac{30 \times 10 \times 10}{8} = 15 \times 25 = 375.$$

139. La solution exacte du problème exigerait la décomposition du nombre qui exprime la valeur de $D'D''$ en deux facteurs, que l'on puisse prendre pour les nombres de dents D' et D'' que doivent avoir les roues M' et M''. Cette décomposition ne peut pas avoir lieu pour le nombre impair 375; il faut donc en chercher un autre qui soit tel, que si la solution qu'il donnera n'est pas rigoureusement exacte, l'erreur soit assez petite pour que l'on puisse la négliger. Pour chercher ce nombre, nous appliquerons la méthode que l'on suit dans la résolution des équations indéterminées du premier degré.

Puisque le second membre de l'équation

$$D'D'' = \frac{30dd'}{8} = \frac{15dd'}{4}$$

doit être un nombre entier, nous supposerons que cette condition est satisfaite par une quantité e, ajoutée au numérateur, et nous poserons

$$D'D'' = \frac{15dd'+e}{4} = 3dd' + \frac{3dd'+e}{4};$$

nous ferons ensuite

$$\frac{3dd'+e}{4} = f, \quad dd' = \frac{4f-e}{3} = f + \frac{f-e}{3};$$

$$\frac{f-e}{3} = g, \qquad f = 3g + e.$$

Il est facile maintenant de faire disparaître les dénominateurs des formules précédentes; la dernière valeur de f étant substituée dans celle de dd', on aura

$$dd' = \frac{4(3g+e)-e}{3} = \frac{12g+3e}{3} = 4g + e;$$

et la substitution de cette valeur donne

$$D'D'' = \frac{15(4g+e)+e}{4} = \frac{60g+16e}{4} = 15g + 4e.$$

Les formules que nous venons de trouver renferment les deux lettres g et e, qui représentent des nombres indéterminés; mais les valeurs de ces lettres ne sont pas arbitraires, elles doivent être telles que les nombres de dents des roues et des pignons qui en résultent satisfassent aux conditions du problème: après quelques essais, on trouvera qu'en faisant $g = 80$ et $e = 4$, il vient

$$D'D'' = 15 \times 80 + 4 \times 4 = 1216 = 32 \times 38,$$
$$dd' = 4 \times 80 + 4 = 324 = 18 \times 18.$$

Ces résultats font connaître que si l'une des roues, par exemple la roue M′, contient 32 dents, l'autre roue M″ aura 38 dents, et chacun des pignons N et N′ sera de 18 dents.

Pour vérifier cette solution, nous remplacerons les lettres de la formule $T' = \frac{dd'}{D'D''} \times t$, par les nombres que nous venons de trouver, en supposant que l'inconnue soit le nombre T′ de tours que doit faire la roue M″, ce qui donnera

$$T' = \frac{18 \times 18}{32 \times 38} \times 30 = \frac{9720}{1216} = 7{,}993.$$

On se proposait d'obtenir 8 tours, le résultat donne 7,993 tours; ainsi la différence est moindre qu'un centième de tour.

Du cric.

140. Parmi les applications des engrenages, on distingue d'abord le *cric,* avec lequel un seul homme peut changer la position et élever à une petite hauteur de grosses pierres de taille, ou d'autres fardeaux d'un poids considérable.

Le mécanisme du cric est ordinairement composé d'une barre de fer dentée sur l'un de ses bords, d'une roue dentée, de deux pignons et d'une manivelle; ce mécanisme est renfermé dans une monture ABCD (*fig.* 72), formée d'un seul morceau de bois de chêne dans lequel on a creusé, suivant sa longueur, une rainure rectangulaire d'une grandeur suffisante pour que la barre dentée L puisse y entrer librement, et un espace circulaire près de la base supérieure AB, pour placer la roue dentée M et les deux pignons N et N', dont l'un, fixé sur l'axe de la manivelle, engrène avec la roue M, et l'autre, placé sur l'axe de la roue M, engrène dans les dents de la barre L.

Soit P la puissance qui agit perpendiculairement à la manivelle du cric; supposons qne la barre dentée L soit appliquée contre une résistance Q, on peut considérer cette résistance comme agissant suivant la tangente à la circonférence décrite par le rayon du pignon N', et la puissance P comme une force qui agit suivant la tangente à la roue dont la circonférence est décrite avec un rayon égal à la manivelle; le plan de cette roue, ceux de la roue dentée et des pignons, sont tous parallèles entre eux, ainsi que leurs axes, d'où il résulte que les conditions d'équilibre du cric sont les mêmes que celles du treuil composé et des roues dentées.

En désignant par R le rayon de la manivelle, par R' celui

de la roue dentée M, et par r, r', les rayons des pignons N et N', on aura, d'après la règle démontrée (134),

$$P : Q :: rr' : RR'.$$

C'est-à-dire que la puissance est à la résistance, comme le produit des rayons des deux pignons est au produit des rayons de la manivelle et de la roue dentée.

Cette proportion donne

$$Q = \frac{P.R.R'}{r.r'}.$$

En prenant les mesures avec le compas sur la *fig.* 72, et les multipliant par 24, on trouve que le rayon R de la manivelle est de 9 pouces; le rayon de la roue dentée $R' = 5$ pouces, et les rayons des pignons $r = r' = 1$ pouce.

Supposons que la force $P = 15$ kilogrammes, et substituons à la place des lettres leurs valeurs numériques, la formule donnera

$$Q = \frac{15^k \times 9 \times 5}{1 \times 1} = 675 \text{ kilog.}$$

Une force de 15 kilogrammes appliquée à la manivelle du cric, fera équilibre à un fardeau du poids de 675 kilogrammes; ce qui donne à la force l'avantage de pouvoir contre-balancer un poids quarante-cinq fois plus grand que celui qu'elle pourrait soutenir par l'application directe, sans l'emploi d'aucune machine.

On pourrait supprimer la roue dentée M et le pignon N'; on ferait engrener avec la barre dentée L le pignon N placé sur l'axe de la manivelle; alors on aurait un *cric simple*, dans lequel la puissance est à la résistance comme le rayon

du pignon est au rayon de la manivelle, ou, d'après la notation que nous venons d'employer,

$$r : R :: P : Q = \frac{PR}{r}.$$

En donnant aux lettres les mêmes valeurs que dans le dernier exemple, on aura

$$Q = \frac{15 \times 9}{1} = 135.$$

La force appliquée à la manivelle de ce dernier cric n'a qu'un cinquième de l'avantage que lui procurerait le cric composé dont nous avons fait connaître le mécanisme; cette supériorité du cric composé lui a fait donner la préférence, et il est généralement employé. On y ajoute une roue à rochet, sur l'axe de la manivelle, et un cliquet qui s'engage dans cette roue, ce qui forme un encliquetage avec lequel on arrête le mouvement rétrograde de la barre dentée.

La partie inférieure de cette barre porte ordinairement une partie saillante dont on se sert lorsque le fardeau qu'on veut élever doit être pris par sa base inférieure.

De la grue

141. On appelle *grue* une machine qui sert à élever des fardeaux; cette machine est ordinairement fixe, mais elle est disposée de manière que l'on puisse la faire tourner horizontalement, de sorte qu'après avoir élevé un fardeau à une certaine hauteur, si l'on communique un mouvement de rotation à la grue, elle transportera le fardeau à un point quelconque de la circonférence qu'il décrit.

Dans la plupart des ateliers où l'on exécute de grands travaux, et principalement dans les fonderies de fer, il est nécessaire d'employer la grue; le mécanisme généralement adopté maintenant pour cette machine, consiste dans un engrenage simple ou composé, avec deux manivelles placées à une hauteur convenable, pour que des hommes puissent facilement y appliquer leurs forces.

La *fig.* 73 représente, en élévation, l'une des grues en bois de la grande fonderie de Charenton; les deux extrémités A et B, de l'arbre vertical AB, sont garnies de frettes, pour consolider les deux tourillons fixés chacun au milieu de l'une des bases de cet arbre; celui de la base inférieure est un pivot en acier, qui doit être ajusté de manière qu'il puisse tourner avec le moins de frottement possible dans la crapaudine sur laquelle il s'appuie, et qui est scellée dans une pierre de taille placée sur un massif en maçonnerie qui forme le support de la grue. Le tourillon de la base supérieure tourne dans un collet en fer, arrêté avec deux boulons à écrous qui traversent une pièce de bois de charpente solidement fixée.

Le bras DE de la grue est perpendiculaire à l'arbre vertical avec lequel il est assemblé et lié par une ferrure composée de trois bandes de fer; deux de ces bandes sont fixées de part et d'autre du bras DE avec des boulons, leurs prolongements embrassent l'arbre vertical, et les parties qui le dépassent sont arrondies et taraudées pour recevoir la troisième bande et les écrous qui servent à la serrer contre cet arbre.

Une moise oblique GH, assemblée à mortaises avec l'arbre vertical et le bras DE, sert à consolider ce bras et à le rendre capable de soutenir les fardeaux qui doivent lui être suspendus.

Dans cette grue, c'est une chaîne qui transmet l'action du moteur au fardeau que l'on veut élever. Il y a environ trente ans qu'on a commencé, en Angleterre, à remplacer par des chaînes de fer les câbles qui servent à la manœuvre des vaisseaux, et l'expérience a prouvé que cette substitution offrait des avantages dans un grand nombre d'autres applications.

Le cylindre du treuil, dont la *fig.* 73[e] représente une projection, et auquel la chaîne est attachée par l'un de ses bouts, est traversé, suivant son axe, par l'arbre de la roue dentée M; on fait passer cette chaîne sur la poulie de renvoi V, suspendue au bras DE de la grue; elle passe ensuite dans la gorge de la poulie mobile U, dont la chape porte un crochet auquel on suspend le fardeau Q que l'on veut élever, et l'autre bout de la chaîne est attaché au bras de la grue par le crochet S; ce crochet et la poulie de renvoi V, sont emmanchés au bras DE, sur lequel on peut les faire glisser, pour amener le crochet de la poulie mobile au-dessus du point où il doit être appliqué.

142. *Trouver les conditions d'équilibre entre la puissance* P *appliquée à l'une des manivelles, et le corps, ou le fardeau* Q, *suspendu au bras* DE *de la grue, par le moyen du crochet qui termine la chape de la poulie mobile* U. — Représentons le rayon de la manivelle par R, celui du pignon N par r; le rayon de la roue dentée M, qui engrène avec le pignon N, par R′, et celui du cylindre sur lequel s'enroule la chaîne par r'; en désignant par F la force qui agit au point de contact des dents du pignon N et de la roue M, et par F′ celle qui agit à l'extrémité du rayon du cylindre, on aura (134)

$$P : F :: r : R,$$
$$F : F' :: r' : R'.$$

Ces deux proportions étant multipliées terme à terme, en négligeant le facteur commun F, et observant que $F' = \frac{1}{2}Q$, à cause de la poulie mobile, il viendra

$$P : \tfrac{1}{2}Q :: rr' : RR', \quad P = \frac{Q.r.r'}{2R.R'}.$$

Le fardeau est un plateau de presse hydraulique, dont le poids Q = 880 kilogrammes; il est représenté dans la *fig.* 73°, par une projection vue de côté

$$R = 0^m,40, \quad R' = 0^m,42, \quad r = 0^m,06, \quad r' = 0,086;$$

ces nombres étant substitués à la place des lettres, la formule générale donnera

$$P = \frac{880 \times 0,06 \times 0,086}{2 \times 0,4 \times 0,42} = 13,5.$$

La force capable de mettre en équilibre un fardeau pesant 880 kilogrammes, devra être équivalente à $13^k,5$.

Après avoir élevé le fardeau, si l'on veut le transporter à une autre place, on arrête d'abord la manivelle avec le crochet de la petite chaîne fixée au point C de l'arbre vertical; ensuite on fait tourner la grue sur son axe, en poussant le fardeau vers l'endroit où il doit être conduit.

143. Les principales questions que l'on peut se proposer, en employant les engrenages dans la construction des machines, sont: 1° d'augmenter ou de diminuer l'action de la puissance, pour la ramener dans une juste proportion, au degré d'énergie qu'elle doit avoir pour être capable de vaincre la résistance contre laquelle on veut la faire agir; 2° de ré-

gler le mouvement de la puissance, soit en l'accélérant, soit en le ralentissant, de manière qu'elle produise la vitesse que l'on veut obtenir; 3° de changer la direction du mouvement, pour le transmettre d'un arbre à un autre arbre, quel que soit l'angle formé par les axes de ces deux arbres, pourvu qu'ils soient situés dans le même plan.

Dans les engrenages dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, nous n'avons considéré que ceux qui sont composés de roues droites, dont les dents sont taillées dans une couronne aux extrémités des rayons; pour chaque engrenage de cette espèce, les arbres, ou les essieux, des roues et de leurs pignons, sont tous parallèles entre eux.

Lorsqu'on veut appliquer des roues dentées pour communiquer le mouvement de rotation d'un arbre à un autre arbre qui ne lui est pas parallèle, ces deux arbres étant situés dans un même plan, leurs axes, prolongés si cela est nécessaire, se coupent en un point que l'on considère comme le centre commun de deux cônes; en coupant chacun de ces cônes par deux plans perpendiculaires à son axe, de manière que la distance de ces plans soit égale à l'épaisseur que doit avoir la roue, et que les sections faites dans les deux cônes se rencontrent dans la génératrice commune, les troncs de cônes compris entre ces plans forment deux roues *d'angle;* ensuite on taille les dents, en fendant ces roues suivant les directions des lignes droites menées du sommet du cône à la circonférence de sa base.

Ces notions générales vont être complétées et éclaircies dans les exemples suivants.

144. *Application des engrenages pour transmettre à des machines le mouvement de l'arbre vertical d'un manége.* — On appelle *manége* une machine qui a beaucoup d'a-

nalogie avec le cabestan, et qui offre le meilleur moyen connu pour mettre des machines quelconques en mouvement, lorsqu'on veut se servir de la force des animaux. Ce sont ordinairement des chevaux que l'on emploie pour faire tourner un manége; on peut aussi y atteler des bœufs ou d'autres bêtes de voiture.

Les *fig.* 74 et 75 représentent le plan et l'élévation d'un manége pour deux chevaux; l'arbre vertical AB est en fonte de fer, le pivot de sa partie inférieure B entre dans une crapaudine solidement fixée sur une base en maçonnerie, et le tourillon de la partie supérieure A tourne dans un collet arrêté avec des boulons qui traversent une pièce de bois de charpente fixée aux poutres encastrées dans les murs du bâtiment.

Une pièce de fonte *mn*, dans laquelle entre l'arbre vertical, sert à fixer les deux barres LM, L'M', situées horizontalement dans la même direction; les extrémités de ces barres entrent dans les pièces de fonte M et M', qui sont percées pour recevoir les queues des fourchettes, ou arcades HIK, H'I'K', en fer forgé, qui peuvent tourner dans ces trous, et qu'on arrête, à leurs parties supérieures, avec des clavettes; le corps de chaque cheval est embrassé par l'une des fourchettes, et pour l'atteler on attache son collier avec des cordes aux branches de la fourchette.

Pour consolider les bras du manége, ou les barres LM, L'M', on a formé un assemblage avec deux moises obliques XY, X'Y', qui sont fixées avec des boulons dans les branches d'une pièce de fonte adaptée à la partie inférieure de l'arbre vertical.

La partie supérieure de cet arbre entre dans le trou qui est au centre de la roue d'angle DE; des rainures sont creusées

dans le trou de la roue, et les parties correspondantes de l'arbre sont aplaties, pour placer des clavettes qui serrent l'arbre, afin que celle-ci reçoive le mouvement de rotation communiqué à l'arbre par les chevaux.

La première roue d'angle DE engrène avec la roue EG; cette deuxième roue est menée par la première, elle est assemblée avec la roue droite ST par le moyen de l'arbre de couche NO, ajusté dans ces deux roues avec des clavettes, comme l'arbre vertical dans la roue DE. L'arbre de couche tourne dans les coussinets des supports qui le soutiennent, et qui sont fixés à des pièces de bois de charpente avec des boulons serrés par des écrous.

La roue dentée ST engrène dans un pignon TV (*fig.* 74); ce pignon est solidement ajusté avec un deuxième arbre de couche N'O', parallèle au premier, qui passe par les centres du pignon TV et de la poulie U.

Pour communiquer le mouvement de rotation continu à une machine, on fait passer sur la poulie U une courroie sans fin qui embrasse la poulie *u* adaptée à la machine; cette courroie, médiocrement tendue, transmet le mouvement de la première poulie à la seconde.

Le manége que nous venons de décrire a été construit en 1825, dans les ateliers de M. John Collier, pour faire marcher des tondeuses et d'autres machines employées dans la fabrication des étoffes; son prix est de 3000 francs. L'arbre vertical, en fonte de fer, est d'un petit volume, et il a beaucoup plus de solidité qu'un arbre en bois, comme ceux qu'on emploie dans les manéges ordinaires; la ferrure de ce manége, qui est simple et solide, et sa bonne construction, peuvent compenser le désavantage des barres, qui ont une longueur moindre que celle de 4 ou 5 mètres qu'on leur donne

ordinairement pour favoriser l'action des chevaux, lorsqu'on n'est pas gêné par les dimensions du local.

On a employé un double engrenage pour obtenir la vitesse que l'on voulait donner à l'arbre de couche; dans la plupart des manéges, cette vitesse est produite immédiatement par le seul engrenage de la roue d'angle et de son pignon, mais alors il faut employer une roue dont le diamètre contienne environ douze fois celui de son pignon, et les irrégularités du mouvement des chevaux produisent des secousses nuisibles, qui sont atténuées par le deuxième engrenage.

145. *On peut appliquer le calcul aux engrenages du manége, soit pour trouver les conditions d'équilibre entre la puissance et la résistance, soit pour déterminer la vitesse de l'arbre de couche qui transmet le mouvement aux machines.* — Nous allons chercher la solution de chacun de ces problèmes.

Désignons par R le rayon LM du manége, et par R′ le rayon CD de la roue d'angle montée sur l'arbre vertical AB; en représentant par P la puissance, ou la force avec laquelle les deux chevaux attelés au manége tendent à faire tourner l'arbre vertical, et par F la force qui agit au point de contact des dents des deux roues d'angle, la condition d'équilibre de ces deux forces donnera la proportion suivante:

$$P : F :: R' : R.$$

Le rayon de la roue d'angle EG, qui engrène avec DE, étant représenté par R″, celui de la roue droite ST par R‴, en désignant par F′ la force appliquée au point de contact des dents de cette dernière roue et de son pignon TV (*fig.* 74), on aura, par un raisonnement semblable,

$$F : F' :: R''' : R''.$$

Si l'on désigne par R^{IV} le rayon du pignon TV, par R^{V} celui de la poulie U, et par Q la force, ou la résistance, qui agit à l'extrémité du rayon de cette poulie, on aura pareillement

$$F' : Q :: R^{V} : R^{IV}.$$

En multipliant ces trois proportions terme à terme, et négligeant les facteurs qui seraient communs dans les deux termes du premier rapport, il viendra

$$P : Q :: R'R'''R^{V} : RR''R^{IV}.$$

Les facteurs des deux termes du second rapport étant donnés, cette proportion fera connaître le rapport de la puissance appliquée au manége à la résistance, ou au poids, que cette puissance est capable de mettre en équilibre.

146. La vitesse de la seconde roue d'angle est à la vitesse de la première comme le nombre des dents de la première roue est au nombre des dents de la seconde roue.

Si l'on désigne par t le nombre de tours que la première roue fait dans une minute, et par d le nombre de ses dents; le nombre de tours que fait la seconde roue, dans une minute, étant désigné par t', et le nombre de ses dents par d', on aura la proportion

$$t' : t :: d : d'.$$

La roue droite ST fait, pendant une minute, le même nombre t' de tours que la roue d'angle EG, dans le même temps; désignons par d'' le nombre des dents de la roue ST, et par d''' et t'' le nombre des dents de son pignon TV (*fig.* 74), et le nombre de tours qu'il fait dans une minute,

nous aurons

$$t'' : t' :: d'' : d'''.$$

En multipliant ces deux proportions terme à terme, et négligeant le facteur commun t', il viendra

$$t'' ; t :: dd'' : d'd'''.$$

C'est-à-dire que le nombre de tours de la dernière roue, ou du pignon TV, pendant un minute, est au nombre de tours que fait dans le même temps l'arbre vertical, ou la roue dont l'axe de cet arbre traverse le centre, comme le produit des nombres de dents de la première et de la troisième roue, est au produit des nombres de dents de la deuxième et de la quatrième roue.

S'il y avait trois paires de roues dentées, on trouverait une proportion dans laquelle chaque terme du second rapport serait composé de trois facteurs.

La dernière proportion donne

$$t'' = \frac{t \times d \times d''}{d' \times d'''}.$$

Pour évaluer cette formule, nous supposerons que le facteur $t = 3$ tours par minute; les nombres de dents des roues $d = 84$, $d' = 32$, $d'' = 72$, $d''' = 18$.

En substituant ces nombres à la place des lettres, et effectuant les calculs, on trouvera

$$t'' = \frac{3 \times 84 \times 72}{32 \times 18} = 31{,}5.$$

On voit, par cette valeur de t'', que l'arbre de couche N'O' fait $31\frac{1}{2}$ tours par minute.

Les chevaux décrivent un cercle dont le rayon LM = R = 3m,2, et dans une minute ils parcourent trois fois la circonférence de ce cercle, ce qui donne 1 mètre par seconde pour la vitesse des chevaux.

147. Le manége a été pendant long-temps le seul moteur que l'on pouvait employer pour transmettre le mouvement aux machines, dans les manufactures qui ne pouvaient pas disposer d'un cours d'eau; le nombre des chevaux appliqués à ces manéges dépendait de la force dont on avait besoin. Il y avait des manéges dans lesquels l'arbre vertical portait six barres horizontales, et on y attelait douze chevaux, en en plaçant deux l'un à côté de l'autre; un nombre double de chevaux était indispensable pour les relais, et il était même nécessaire d'en avoir d'autres disponibles, pour remplacer ceux qui éprouvaient des accidents et qui tombaient malades.

Depuis environ vingt ans, ces manéges ont été successivement remplacés par des machines à vapeur, dans la plupart des manufactures. Ce dernier moteur, qui a produit une révolution dans les arts mécaniques, n'a cependant pas rendu le manége inutile; il est encore en usage dans beaucoup d'établissements qui ne sont pas continuellement en activité, et dans lesquels on n'a pas besoin d'une force plus grande que celle des chevaux ou des bœufs dont on peut disposer.

Des principales machines employées dans les travaux d'architecture.

148. Nous avons déjà fait connaître plusieurs machines, telles que le levier, le cric, le cabestan et les poulies, dont les ouvriers font un grand usage dans la construction des bâtiments.

La chèvre, qui est la machine le plus fréquemment em-

ployée par les maçons et les charpentiers, pour élever les matériaux, est un treuil dont les deux montants, en bois de charpente, forment un triangle isoscèle; ils sont séparés l'un de l'autre, à leur sommet, d'un espace suffisant pour placer une poulie qui tourne autour d'un boulon en fer par lequel ces deux montants, qui se nomment les branches de la chèvre, sont traversés; leur assemblage est formé par des traverses horizontales en bois, dont la première est à 8 pouces au-dessus de la base, la deuxième à 5 pieds 6 pouces, et les suivantes à 2 pieds l'une de l'autre; on arrête cet assemblage avec des chevilles.

Les montants sont percés chacun d'un trou à la hauteur de 3 pieds 6 pouces, pour recevoir les tourillons du cylindre, et celui-ci est percé près de chacun de ses tourillons, comme l'arbre du cabestan ordinaire, de deux trous perpendiculaires entre eux, dans lesquels on fait entrer les barres, ou les leviers qui servent à le faire tourner, et qui représentent les rayons de la roue du treuil.

La chèvre se démonte pour la transporter à l'endroit où l'on veut en faire usage; après l'avoir remontée, on l'arrête avec des cordages qui partent de son sommet, et que l'on prolonge jusqu'à des points fixes convenablement placés, auxquels on les attache; la chèvre, arrêtée par ces cordages, est inclinée du côté du fardeau que l'on veut élever.

On fait passer sur la poulie qui est au sommet de la chèvre, un cordage d'une force suffisante pour résister aux plus fortes charges qu'il doit porter: on attache ce cordage au cylindre par l'un de ses bouts; l'autre bout étant fixé au fardeau que l'on veut élever, les hommes qui appliquent leurs forces et leurs poids aux barres, qu'ils font entrer successivement

33..

dans les trous du cylindre, font enrouler sur ce cylindre la corde qui élève le fardeau.

149. Les conditions d'équilibre de la chèvre sont les mêmes que celles du treuil; ainsi, en désignant la force d'un homme, ou le poids qu'il pourrait élever, par P; le nombre de ceux qui sont appliqués aux barres, ou leviers, par n; la résistance, ou le poids du fardeau, par Q; la longueur moyenne du levier par R; et le rayon du cylindre par r, on aura

$$nP : Q :: r : R; \quad Q = \frac{nP \times R}{r}.$$

Pour mettre le fardeau Q en équilibre, la puissance devra être égale au quotient du produit de la force des hommes multipliée par la longueur moyenne du levier, divisé par le rayon du cylindre.

On devra ajouter le rayon de la corde au rayon du cylindre; et si la corde s'enroulait une ou plusieurs fois sur elle-même, il faudrait, pour rendre le calcul exact, avoir égard à l'accroissement qui en résulterait pour le rayon du cylindre; et enfin, si l'on voulait avoir le véritable résultat, il faudrait tenir compte de la partie de la puissance qui est employée à vaincre les résistances produites par le frottement et la raideur de la corde.

Des grues et de quelques autres machines avec lesquelles on élève les pierres de taille et les autres matériaux, pour la construction des bâtiments.

150. Les grues, employées pour élever les pierres de taille dans les travaux d'architecture, pour la construction des grands édifices, sont des machines en bois de charpente, composées d'un arbre vertical et d'un bras oblique qui se

nomme *volée;* la dénomination de cette machine vient de ce que son bras, ou sa volée, a quelque analogie avec le long cou de la grue. L'arbre vertical est posé sur un pied fixe solidement établi, et il est consolidé par un assemblage de fortes pièces de bois de charpente; son sommet porte un tourillon, ou un pivot conique en fer, qui entre dans une crapaudine encastrée dans le bras qui forme la volée; celle-ci est inclinée, et le pivot de l'arbre vertical permet de lui communiquer un mouvement de rotation par lequel on transporte la pierre, après l'avoir élevée, à tel point que l'on veut de la circonférence que décrit le bec de la grue, ou l'extrémité de sa volée.

On adapte à la grue un treuil dont la roue est garnie de chevilles près de sa circonférence; ces chevilles, distantes l'une de l'autre d'environ 1 pied, sont perpendiculaires au plan de la roue.

Un câble étant attaché par l'un de ses bouts au cylindre du treuil, on le conduit à la poulie fixe que porte le bec de la grue, en le faisant passer sur des poulies de renvoi convenablement placées; on attache ensuite au prolongement de ce câble la pierre que l'on veut élever, et des hommes qui tournent la roue du treuil, par le moyen de ses chevilles, font enrouler sur le cylindre le câble qui élève cette pierre.

Nous nous bornons à ces notions générales sur les grues imaginées par les architectes. Malgré les nombreuses recherches que l'on a faites pour les perfectionner, elles ne remplissaient que très imparfaitement l'objet pour lequel elles avaient été construites; on les a remplacées par les machines que nous allons faire connaître, qui réunissent les avantages d'une construction simple et solide, et qui sont d'une grande facilité dans les applications.

151. La nouvelle église de Sainte-Geneviève, commencée en 1757 sur les dessins de Soufflot, dont Rondelet a été le collaborateur et le successeur, a changé plusieurs fois de destination; d'après le décret de l'Assemblée nationale du 3 avril 1791, ce nouvel édifice devait être le Panthéon, destiné à recevoir les cendres des grands hommes. Pendant le règne des Bourbons, cet édifice a été disposé pour remplacer le Panthéon par l'église de Sainte-Geneviève; enfin, depuis la révolution de juillet 1830, on a commencé les travaux nécessaires pour le rétablissement du Panthéon, qui sera l'un des principaux monuments d'architecture de la ville de Paris; c'est le dernier dans lequel les grues, construites sur le système dont nous venons de donner succinctement la description, aient été employées; Rondelet annonce, dans son *Traité de l'art de bâtir*, qu'il y en a vu sept en activité.

L'église de la Madeleine, commencée en 1764, a aussi éprouvé beaucoup de changements, soit par les différences dans les plans des architectes qui en ont eu successivement la direction, soit par le changement de la destination que l'on se proposait de donner à cet édifice. Sous le règne de Bonaparte, on devait en former un Temple de la Victoire; la dépense, suivant le projet, était évaluée à 8 millions; les travaux exécutés, depuis 1804 jusqu'au commencement de l'année 1813, avaient coûté 2 millions; ce projet a été abandonné, par suite des revers et des désastres qui ont ramené les Bourbons en France. L'exécution du premier projet a été reprise pendant la Restauration, et, lorsqu'il sera achevé, cet édifice sera l'une des plus belles églises de Paris.

152. C'est dans la construction de l'église de la Madeleine que les grues ont été remplacées par une nouvelle machine

beaucoup plus simple, dont les *fig.* 76 et 77 représentent le plan et l'élévation.

Cette nouvelle machine consiste en une ou plusieurs paires de moufles, attachées au faite d'un châssis en charpente, qui a la forme d'un tronc de pyramide quadrangulaire; les montants, ou les arètes, sont quatre poutres en bois de sapin; les bases rectangulaires, en bois de charpente, sont assemblées à mortaises, et les faces latérales sont consolidées par des traverses parallèles aux bases, et par des moises obliques, qui se croisent en forme de croix de Saint-André.

Les quatre poutres en bois de sapin, qui forment les montants, ont 1 pied d'équarrissage en bas, 8 pouces 6 lignes en haut et 69 pieds de longueur.

On a placé sur la base supérieure une forte traverse L en bois de chêne (*fig.* 77); cette traverse, solidement fixée, porte un boulon, ou bien un lien de fer, dont la partie inférieure est terminée par uue boucle, à laquelle est attachée la moufle fixe M à trois poulies; la corde, après avoir enveloppé les poulies de cette moufle fixe et celles de la moufle mobile N, passe dans la gorge de la poulie fixe K, attachée aux moises de la partie inférieure du châssis, d'où elle est conduite, en passant sur d'autres poulies fixes K', K'', au cylindre vertical du cabestan, auquel elle est attachée par l'un de ses bouts; la partie inférieure de l'arbre du cylindre traverse le levier horizontal GOG' (*fig.* 76^b), qui sert à mettre la machine en mouvement.

Le dessin représente la machine disposée pour élever les pierres qui entrent dans la construction d'une colonne, dont la *fig.* 76^a indique le plan; on amène, au-dessous des moufles, la pierre que l'on veut élever. Nous supposons que cette pierre doit être placée dans le fût de la colonne; alors

sa forme est celle d'un demi-cylindre; elle est percée, au milieu de son épaisseur, d'un trou qui passe par le centre et par le milieu de l'arc, dans lequel on fait entrer une tige de fer, dont la partie supérieure porte une boucle que l'on accroche à la moufle mobile; la partie inférieure de cette tige entre dans la mortaise percée au milieu d'une petite plaque de fer, qui est arrêtée contre la pierre par une clavette qui traverse la tige.

Il y a d'autres pièces de bois de charpente, sur lesquelles on pose des planches, pour former un échafaud à la hauteur de l'assise dans laquelle la pierre que l'on élève doit entrer; les ouvriers qui reçoivent les pierres et qui les posent, élèvent successivement cet échafaud pour le mettre au niveau de l'assise qu'ils doivent poser.

Lorsqu'une colonne est achevée, on soulève le châssis de la machine avec des leviers, pour placer sa base sur des rouleaux, et l'on fait avancer cette machine, garnie de tous ses équipages, à côté de l'une des autres colonnes que l'on veut élever.

Je suis allé plusieurs fois observer cette machine, et les autres travaux de l'église de la Madeleine, lorsqu'on permettait au public de traverser le chantier, du côté de l'ouest.

Le 24 novembre 1824, on avait attelé cinq chevaux au camion, pour conduire à la machine l'une des pierres du chapiteau d'une colonne. Le 3 décembre suivant, on a posé le chapiteau de la dernière colonne: il y avait deux paires de moufles et deux cabestans, l'un au sud et l'autre au nord de l'édifice, dans la direction de la machine, pour élever une pierre dont le poids était évalué à 5000 kilogrammes environ.

Le 10 mai 1826, on élève les pierres pour construire la voûte plate qui couvre la galerie extérieure comprise entre le

mur et les colonnes, du côté de l'ouest; l'une de ces pierres (*fig*. 78) a été amenée sous la machine avec un camion traîné par quatre hommes et deux chevaux.

La moufle mobile porte un crochet à quatre branches auxquelles sont attachées quatre cordes égales entre elles, ayant chacune un anneau de fer à son extrémité.

Pour décharger la pierre de dessus le camion, on fait passer sous cette pierre deux câbles qué l'on accroche à la moufle mobile, et pour qu'elle ne soit pas ébréchée par la pression de ces câbles, on place de petits paillassons sur les angles qui sont en contact; on fait tourner le cabestan, et lorsque la pierre est élevée à une hauteur suffisante, les ouvriers retirent le camion; ensuite on tourne le cabestan en sens contraire, pour descendre la pierre sur le sol, en la disposant de manière que l'un de ses bords porte sur des pierres ou sur des morceaux de bois pour lui donner une position inclinée.

La pierre est percée de trois trous rectangulaires placés sur une ligne parallèle au plus grand côté: ces trous ont 5 pouces $\frac{1}{2}$ de longueur sur 4 pouces de largeur. On place d'abord, dans celui du milieu, une tige en fer (*fig*. 79), qui déborde les deux faces opposées; on fait entrer dans les parties saillantes les anneaux de deux des cordes attachées au crochet à quatre branches, et l'on tourne le cabestan pour dresser la pierre de champ; ensuite on retire la tige de fer du trou du milieu, on place cette tige et une autre pareille dans les deux autres trous, on fait entrer les parties saillantes de ces deux tiges dans les anneaux des quatre cordes attachées aux branches du crochet; par cette disposition, la pierre se trouve bridée et solidement attachée à la poulie mobile.

Les ouvriers ont employé quinze minutes à exécuter les opérations que nous venons de décrire.

On a attelé à la barre du cabestan les deux chevaux qui avaient ameué cette pierre; sa forme étant irrégulière, on ne peut calculer son volume que par approximation. J'ai mesuré les dimensions d'une autre pierre semblable, et j'ai remarqué qu'on s'écarterait peu de l'exactitude en la considérant comme équivalente à un parallélépipède rectangle qui aurait pour base 5 pieds 7 pouces $\frac{1}{2}$ sur 4 pieds 4 pouces, et dont la hauteur serait de 1 pied 6 pouces; en réduisant ces nombres en fractions ordinaires, pour se débarrasser des nombres complexes, et formant leur produit, soit par des multiplications, soit par les Tables de logarithmes, on trouvera que le volume de cette pierre est à peu près de

$$\frac{45}{8} \times \frac{13}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{45 \times 13}{16} = 36{,}56 \text{ pieds cubes.}$$

Pour trouver son poids, nous observerons que le pied cube de pierre de taille des environs de Paris pèse environ 160^{lb}; en multipliant ce nombre par celui que nous venons de trouver, on aura

$$160^{lb} \times 36{,}56 = 5849^{lb}{,}6.$$

Dans une autre visite, j'ai mesuré la barre, ou le levier GO (*fig.* 77) du cabestan; sa longueur depuis le centre de l'arbre jusqu'au point où l'on attèle le cheval, à 5 pouces de l'extrémité, est de 8 pieds 5 pouces; c'est le rayon du cercle que décrit le cheval: j'ai observé qu'il faisait trois tours par minute, d'où il résulte que sa vitesse était de 2 pieds 7 pouces 8,76 lignes par seconde.

Roue des carrières.

153. On exploite, dans les environs de Paris, de nombreuses carrières de pierres à bâtir : elles sont ouvertes dans les champs, sans aucune clôture qui empêche d'en approcher; mais, pour éviter les accidents qui pourraient arriver, soit aux personnes, soit aux animaux qui parcourent les champs dans lesquels se trouvent ces carrières, leurs abords sont élevés d'environ 4 pieds au-dessus du sol : cet exhaussement a aussi l'avantage de faciliter le chargement des pierres sur les voitures.

La machine dont on se sert pour tirer les pierres des carrières est un treuil (*fig.* 80 et 81), placé sur l'ouverture ou sur le puits; ce treuil est construit en bois de charpente, sur le même principe que celui dont nous avons donné la description (**116**); on l'a nommé *roue des carrières*, parce que sa roue, qui est d'un grand diamètre, en est la partie la plus apparente, et pour caractériser le service spécial auquel il est appliqué.

La roue de ce treuil est garnie de chevilles perpendiculaires à son plan, ce qui lui a fait donner le nom de *roue à chevilles*, dans d'autres applications.

Ce sont des hommes qui tournent la roue des carrières; ils agissent par leurs poids, en appliquant leurs mains aux chevilles les plus élevées qu'ils puissent atteindre : il faut employer un nombre d'hommes suffisant pour que le moment de la force, ou du poids qu'ils sont capables de produire, excède le moment de la pierre attachée au câble qui s'enroule sur le cylindre du treuil, parce que l'égalité de ces deux moments produirait l'équilibre (**117**).

J'ai vu, dans la plaine de Chaillot, une roue de carrière à

laquelle neuf ouvriers étaient appliqués. La somme de leurs forces était trop faible pour élever la pierre attachée au câble; un dixième ouvrier est venu se joindre à eux: alors cinq ouvriers étaient appliqués de chaque côté de cette roue, qui a 90 chevilles placées près de sa circonférence, à 1 pied de distance l'un de l'autre. Ce nombre de chevilles et la longueur de la circonférence de cette roue sont extraordinaires; dans les autres carrières, les roues ont environ 60 chevilles; celle qui est représentée dans les *fig.* 80 et 81 a 16 pieds de diamètre et 45 chevilles.

154. Si la puissance P qui agit sur la roue des carrières exerçait son action suivant la tangente, ou la perpendiculaire à l'extrémité du rayon horizontal CA, en désignant par Q le poids de la pierre attachée à la corde perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB du cylindre, la condition d'équilibre serait exprimée par la proportion suivante:

$$P : Q :: CB : CA;$$

mais les hommes appliqués à une roue qui a 8 pieds de rayon ne peuvent atteindre que des chevilles qui correspondent à des rayons moins élevés que le rayon horizontal CA, à moins qu'ils ne montent sur les chevilles, et alors leurs centres de gravité se rapprochent du centre de la roue.

Supposons que C*d* soit le rayon à l'extrémité duquel passe la résultante *p* des forces, ou des poids, qui agissent sur la roue; cette résultante sera dirigée suivant la verticale *dp*, dont le prolongement coupe en *a* le rayon horizontal CA; par conséquent cette résultante *p* pourra être considérée comme ayant son point d'application au point *a* du rayon horizontal, et l'on devra prendre C*a* au lieu de CA, pour le qua-

trième terme de la proportion précédente, ce qui donnera

$$Q = \frac{P \times Ca}{CB}.$$

On peut évaluer à 60 kilogrammes la force d'un homme qui agit par son propre poids; si cette force est appliquée à l'extrémité *a* du levier C*a*, dont la longueur soit de 6 pieds 9 pouces, ou 81 pouces, et que le rayon CB du cylindre soit de 8 pouces, on aura

$$Q = \frac{60 \times 81}{8} = 7,5 \times 81 = 607,5 \text{ kilogrammes.}$$

Ce résultat fait voir qu'un homme, appliqué aux chevilles d'une roue dont le diamètre est de 8 pieds, pourrait mettre un poids de $607^{k},5$ en équilibre. Nous n'avons pas fait entrer dans le calcul le rayon de la corde, qui doit être ajouté au rayon du cylindre.

Si l'on voulait passer de l'équilibre au mouvement, à l'augmentation du rayon du cylindre, produit par l'enroulement de la corde, il faudrait ajouter la raideur de la corde et le frottement, ce qui réduirait à environ 500 kilogrammes le poids que chaque homme serait capable d'élever.

Les hommes appliqués à la roue à chevilles lui font faire à peu près un tour par minute; le rayon du cylindre étant de 8 pouces, sa circonférence est de 4 pieds 2 pouces 3 lignes, ou $1^{m},36$; c'est l'espace vertical que parcourt la pierre dans une minute.

Le treuil avec une roue à chevilles n'est pas seulement en usage pour tirer les pierres des carrières: cette machine porte quelquefois deux roues; on lui a donné le nom de *singe* dans les travaux d'architecture, où elle est encore employée; elle

ne peut être mise en mouvement que par des hommes, et il est avantageux de la remplacer par le cabestan, toutes les fois que les circonstances le permettent, afin d'éviter les accidents auxquels sont exposés les hommes qui agissent sur la roue à chevilles, lorsque le câble vient à casser, ce qui produit un mouvement rétrograde par lequel ils sont renversés les uns sur les autres: d'ailleurs on peut appliquer des hommes et des chevaux au cabestan, en le disposant comme celui de la *fig.* 77, dont on s'est servi dans la construction de l'église de la Madeleine, ce qui produit une plus grande force avec une moindre dépense.

Treuil portatif avec des roues d'engrenage.

155. Le treuil portatif que MM. Manby et Wilson ont importé d'Angleterre, il y a environ vingt ans, a été généralement adopté dans les ateliers où l'on a de grands fardeaux à élever, et dans les travaux de bâtiment.

Ce treuil (*fig.* 82 et 83) est dans un châssis, ou dans une cage, composée de deux pièces de fonte A, A, qui ont la forme de deux triangles isoscèles égaux, posés sur leurs petits côtés, et assemblés parallèlement entre eux, avec trois tiges de fer *a*, *b*, *c*; ces tiges ont des embases, et leurs extrémités sont taillées en vis pour recevoir des écrous qui fixent l'assemblage de la cage.

Le cylindre B, sur lequel s'enroule la corde, est parallèle aux trois tiges d'assemblage; il est traversé, suivant son axe, par un arbre carré en fer, sur lequel est fixée la roue d'engrenage C; les tourillons de cet arbre tournent dans des cercles en cuivre adaptés aux faces triangulaires de la cage.

Le pignon D, qui engrène avec la roue C, est fixé sur

l'arbre, ou sur la tige *d*, parallèle au cylindre; elle tourne dans des viroles en cuivre ajustées aux faces de la cage, et les deux manivelles *lmn*, avec lesquelles on tourne le treuil, sont fixées avec des écrous aux prolongements de cette tige. La tige *a* porte un crochet d'arrêt *k*, qui vient s'engager contre une embase de l'arbre *d*. Lorsqu'on veut désengrener, il suffit de lever ce crochet et de tirer l'arbre *d*, ce qui fait avancer le pignon; alors la roue et le cylindre peuvent tourner librement.

Pour empêcher le mouvement rétrograde, il est utile d'ajouter au mécanisme un encliquetage, composé d'une roue à rochet fixée à l'arbre *d*, et d'un cliquet adapté à la tige *a*, de la même manière que le crochet d'arrêt *k*.

Il faut fixer solidement le treuil lorsqu'on veut en faire usage; dans les applications isolées, on fait passer des planches sur les traverses inférieures *b* et *c* de la cage, et l'on charge ces planches avec des poids assez lourds pour établir la stabilité du treuil; on le fixe avec des boulons sur un bâti en bois de charpente, lorsqu'on doit s'en servir dans un même lieu pour élever un grand nombre de fardeaux.

156. Le treuil portatif que nous venons de décrire est souvent employé avec un mât (*fig.* 84), pour élever les pierres de taille et les autres matériaux qui entrent dans la construction des bâtiments; le câble est attaché par l'un de ses bouts avec une ficelle qui passe dans un petit trou *i*, percé dans l'un des plateaux qui débordent la surface du cylindre, ou bien au crochet *t*; ce câble passe sur les trois poulies fixes N, N′, N″, adaptées à la partie supérieure du mât, et son autre bout porte une esse, ou un crochet, auquel on attache le fardeau Q que l'on veut élever.

Cherchons maintenant les conditions d'équilibre entre la

puissance P, appliquée à la manivelle du treuil portatif, et le fardeau Q, suspendu à la corde qui passe sur les poulies fixes N'', N', N, adaptées au mât, et qui vient de s'enrouler sur le cylindre B du treuil.

Désignons le rayon de la manivelle par R, celui du pignon D par r, celui de la roue C par R', et celui du tambour, ou du cylindre B, par r'; nous aurons les proportions suivantes (110) :

$$P : q :: r : R,$$
$$q : Q :: r' : R';$$

ces proportions donnent

$$P : Q :: rr' : RR'; \quad Q = \frac{PRR'}{rr'}.$$

Pour calculer le second membre de cette formule, nous observerons que la force d'un homme appliquée à une manivelle, est d'environ 12k,5; ainsi nous ferons $P = 12,5$; le rayon de la manivelle $R = 14$ pouces, le rayon du cylindre $r' = 3$ pouces; le pignon D a 10 dents et la roue C en a 72, que nous pouvons prendre au lieu de leurs rayons r et R'. Ces nombres étant substitués à la place des lettres, on aura

$$Q = \frac{12,5 \times 14 \times 72}{10 \times 3} = 420 \text{ kilogrammes.}$$

Le poids de 420 kilogrammes, que nous trouvons pour résultat, est 33,6 fois plus grand que la puissance, ou la force de 12k,5, avec laquelle un homme doit agir pour établir l'équilibre.

157. La *fig.* 85 représente l'élévation d'un treuil portatif construit à Fourchambault par M. Delamorinière, lorsqu'il

dirigeait les ateliers de M. E. Martin; ce treuil renferme un engrenage composé qui donne un grand avantage à la puissance, il a été employé pour tendre les chaînes du pont suspendu établi sur la Seine, en face de Bercy.

Deux triangles isoscèles en fonte, assemblés avec trois tiges de fer *a*, *b*, *c*, comme dans le treuil que nous venons de décrire, forment la cage; chacun des triangles renferme une pièce M qui le coupe vers le milieu de sa hauteur, parallèlement à sa base, et qui est prolongée extérieurement d'une quantité à peu près égale à celle qui est comprise entre les côtés; ces pièces, qui consolident les faces de la cage, sont percées vers leurs extrémités de deux trous qui se correspondent, comme ceux des tiges d'assemblage, et dans lesquels on ajuste des cercles en cuivre pour faciliter le mouvement de rotation des tourillons de deux arbres en fer.

L'arbre qui entre dans les trous compris dans l'intérieur des triangles, passe par l'axe du cylindre, ou du tambour, et deux roues d'engrenage C sont fixées sur cet arbre, aux extrémités du tambour.

Une roue d'engrenage E, et un pignon adjacent F, sont fixés à l'une des extrémités du deuxième arbre, du côté qui correspond à la roue C; l'autre extrémité de cet arbre porte un pignon.

Cette description succincte suffit pour faire concevoir le jeu de la machine. Le pignon D, fixé sur l'arbre de la manivelle, engrène avec la roue E; l'arbre de cette roue porte le pignon F, qui engrène avec la roue C, et le deuxième pignon de cet arbre engrène avec la roue qui est fixée à l'autre extrémité du tambour; ainsi c'est par le deuxième engrenage que l'action de la puissance est transmise à la résistance, ou au fardeau attaché à la corde qui s'enroule sur le tambour.

Les trois roues étant égales entre elles, ainsi que leurs pignons, si l'on calcule cet engrenage, on trouvera que l'avantage qu'il procure à la puissance est double de celui qu'on obtient avec le treuil qui ne renferme qu'une seule de ces roues conduite par son pignon.

158. On a construit, à Charenton, quelques treuils portatifs avec deux pignons sur l'arbre des manivelles, qui engrènent avec deux roues fixées à l'arbre du tambour; c'est le même engrenage répété deux fois, et l'avantage de la puissance, dans ces treuils composés, est le même que dans celui qui ne renferme que l'engrenage d'une seule de ces roues avec son pignon.

Le treuil portatif simple contient à peu près 228 kilogrammes de fonte, 47 de fer forgé et 5 de cuivre, ce qui forme 280 kilogrammes brut; lorsqn'il est ajusté, son poids est d'environ 270 kilogrammes.

Des grues employées sur les ports.

159. Les grues sont d'une grande utilité sur les ports, ponr faciliter le chargement et le déchargement des pierres de taille et antres matérianx, ainsi que des barriques, des balles et des sacs de marchandises qui sont transportés dans les navires et dans les bateaux.

La première grue employée à Paris pour cet usage, a été construite par M. Albert, il y a environ trente ans: elle a deux volées; son mécanisme est composé d'nn treuil dont le cylindre porte, à chacun de ses bouts, une roue qui a la forme d'un tambour; les chevilles, ou les fuseaux qui assemblent ses deux bases, ont 19 pouces de longueur.

On a disposé le treuil de manière que, pour chaque roue, deux hommes assis sur un bauc, et le dos appuyé contre les

planches qui forment l'enceinte d'une cabane, agissent avec leurs pieds, en pressant les fuseaux à mesure qu'ils viennent à la hauteur du centre de la roue; on peut y appliquer deux autres hommes, qui tiennent avec leurs mains une tringle horizontale fixée au toit de la cabane, et qui font agir leurs pieds sur les fuseaux de la roue.

Le rayon des roues est de 8 pieds; celui du cylindre doit être de 8 pouces, d'après les proportions adoptées dans les treuils de cette espèce.

Représentons par P la puissance, ou la force des hommes appliqués à la roue, et par Q le fardeau suspendu au câble qui s'enroule sur le cylindre; dans le cas d'équilibre, nous aurons

$$P : Q :: 8 : 96 :: 1 : 12.$$

On double l'effet de la puissance par le moyen d'une poulie mobile que l'on applique au câble; le fardeau est attaché à la chape de cette poulie. En supposant que la force de chacun des quatre hommes assis sur les bancs soit de 60 kilogrammes, le poids du fardeau qu'ils seront capables de mettre en équilibre sera de

$$60 \times 4 \times 24 = 5760 \text{ kilogrammes.}$$

La grue de M. Albert a d'abord été établie sur le port Saint-Nicolas; elle est maintenant sur le port d'Orsay, où elle sert principalement à décharger les pierres de taille qui viennent dans des bateaux. On a construit sur le même port, il y a quelques années, deux autres grues, dans lesquelles on a remplacé les roues du treuil par des roues d'engrenage en fonte avec des manivelles.

160. On a établi sur le bord du bassin de la Villette des

grues en bois de charpente, construites d'après le système de celles qui sont en usage dans les ports d'Angleterre; des grues du même système, mais avec quelques perfectionnements, ont été établies pour l'usage des bateaux qui entrent dans le bassin de la gare de Saint-Ouen. Les *fig.* 86 et 87 représentent l'élévation latérale et le plan de l'une de ces grues.

Cette grue est en bois de chêne; elle est composée d'un fût, ou d'un arbre vertical A, de deux moises B, B, qui forment la volée; elles sont assemblées obliquement, avec des boulons aux deux faces opposées du fût, et, pour les consolider, on place au-dessous une troisième moise C, assemblée à mortaise par l'un de ses bouts au fût; l'autre bout passe entre les deux premières moises, auxquelles il est fixé par des boulons vers l'extrémité de la volée. On voit que cet assemblage forme un triangle obliquangle.

L'arbre vertical, ou le fût, est garni d'une frette à sa partie inférieure, et il est muni d'un pivot solidement fixé à son centre; cet arbre entre dans le trou cylindrique d'un plateau de fonte D, fixé par quatre boulons aux pierres de taille qui couvrent le massif de maçonnerie; il descend dans un puits dont la profondeur est de $3^{m},4$, et son pivot s'appuie sur une crapaudine encastrée dans une pierre de taille qui forme le fond du puits dont les parois, au-dessus de deux assises de pierres de taille, sont construites en moellon.

Une garniture de huit galets est ajustée dans le plateau D, afin de diminuer le frottement de la grue lorsqu'on lui communique le mouvement de rotation.

Le mécanisme de cette grue consiste dans un treuil avec un engrenage qui peut être, à volonté, simple ou double. Les coussinets dans lesquels tournent les arbres des roues dentées, ceux de leurs pignons et les tourillons de l'arbre du cy-

lindre, sont placés sur deux supports en fonte *a*, *a*, fixés aux deux faces opposées de l'arbre vertical A.

On peut adapter, aux extrémités de chacun des arbres des pignons, deux manivelles que l'on arrête avec des écrous.

La roue à frein *f*, dont le diamètre est plus petit que celui de la roue dentée *b*, avec laquelle elle a été fondue, est enveloppée par une lame d'acier mince; cette lame est fixée par l'un de ses bouts au centre de rotation *i* d'un levier *h*, et l'autre bout est fixé à l'extrémité *k* du même levier. Nous verrons bientôt l'effet qui peut être produit par ce frein.

Le cylindre *l* du treuil est enveloppé par une entaille rectangulaire tracée en hélice qui a sept ou huit filets; on a fixé, vers l'une des extrémités du cylindre, un crochet auquel on attache, avec plusieurs doubles d'une ficelle, l'un des bouts de la chaîne qui sert à transmettre l'action de la puissance au fardeau que l'on veut élever. Lorsqu'on fait tourner le cylindre et que la chaîne s'enroule sur sa surface, la partie des anneaux, ou des chaînons de champ qui lui est adjacente, entre dans l'entaille, et l'autre partie des mêmes chaînons est à peu près de niveau avec ceux qui tombent sur la surface comprise entre les entailles: cette disposition a pour objet d'empêcher la chaîne de se tordre en s'enroulant sur le cylindre.

On a placé entre les moises B, B et C, un rouleau *m*, pour soutenir la chaîne et partager sa flexion en allant du cylindre à la poulie *n* de la volée; la chaîne passe dans la gorge de cette poulie, et le crochet qu'elle porte à son extrémité vient s'engager dans la boucle attachée au fardeau Q que l'on veut élever.

161. *Trouver les conditions d'équilibre entre la puissance* P, *appliquée à la manivelle du treuil de la grue, et le poids du fardeau* Q *attaché à la chaîne qui s'enroule sur le cy-*

lindre l *de ce treuil.* — Les rayons de la manivelle et du pignon *c* étant représentés par R et *r*, si l'on appelle *q* la force qu'il faudrait appliquer à l'extrémité du rayon *r* pour faire équilibre à la puissance P, on aura la proportion

$$P : q :: r : R.$$

Nous désignerons par R′ et *r*′ les rayons de la roue *b* et du pignon *c*′, et nous supposerons qu'une force *q*′, appliquée à l'extrémité *r*′, fait équilibre à la force *q*, ce qui donnera

$$q : q' :: r' : R'.$$

En désignant par R″ et *r*″ les rayons de la roue *b*′ et du cylindre *l*, nous aurons

$$q' : Q :: r'' : R''.$$

Ces trois proportions étant multipliées terme à terme, en négligeant les facteurs communs, on trouve pour résultat

$$P : Q :: rr'r'' : RR'R'', \quad P = \frac{Qrr'r''}{RR'R''}.$$

Pour appliquer cette formule à un exemple numérique, nous observerons d'abord que les rayons des roues dentées et ceux de leurs pignons, peuvent être remplacés par les nombres de leurs dents.

La puissance P est appliquée à la manivelle dont le rayon $R = 0^m,4$; le rayon du cylindre *l*, représenté par $r'' = 0^m,12$; la chaîne est attachée à l'une des cinq chaudières en cuivre des deux machines à vapeur de la force de 80 chevaux, chacune construites à Charenton en 1827, pour le bateau à vapeur *le Nageur* de la Marine royale. Cette chaudière est

représentée dans la *fig.* 86ᵃ par une projection suivant sa longueur.

Supposons que le poids de la chaudière ou du fardeau Q = 6000 kilogrammes; les roues *b* et *b'*, dont les rayons sont représentés par R' et R'', ont chacune 75 dents, et leurs pignons *c* et *c'* ont chacun 9 dents. Ces nombres étant substitués à la place des lettres dans la formule, on aura

$$P = \frac{6000 \times 0,12 \times 9 \times 9}{0,4 \times 75 \times 75} = 25,9.$$

log 6000. .	3.7781513
log 0,12. . —	1.0791812
2 log 9.	1.9084850
c 6 log 0,4. . .	0,3979400
c 2 log 75. . . .	6.2498774
log 25,92.	11.4136349

Nous trouvons pour résultat 25ᵏ,9. Cette puissance est un peu moindre que $\frac{1}{230}$ du poids du fardeau; elle est équivalente à la force moyenne de deux hommes appliqués aux manivelles.

Dans les applications ordinaires, les fardeaux ne sont pas d'un poids aussi considérable que celui de l'exemple précédent; alors on relève le crochet d'arrêt o (*fig.* 87), qui était engagé entre les embases d'une tige placée au-dessous de l'arbre des manivelles, parallèlement à cet arbre, et dont les deux bouts entrent dans les pièces de fonte *a*, *a*, sur lesquelles sont placés les coussinets, ou les empoises des arbres. Ce crochet étant relevé, on fait avancer l'arbre des manivelles pour désengrener le pignon *c*; ensuite on adapte les manivelles à l'arbre de la roue *b*, sur lequel est fixé le pignon *c'* qui s'engrène avec la roue *b'*. D'après cette disposition,

on a un engrenage simple, beaucoup plus expéditif que l'engrenage double.

162. Lorsque le fardeau est élevé à une hauteur suffisante, pour le conduire au-dessus de l'espace où il doit être déposé, on fait tourner la grue, en poussant le levier *h* (*fig.* 86) qui entre dans la gâche fixée à l'une des faces du fût.

On abandonne les manivelles pour laisser descendre le fardeau; alors un ouvrier lève le levier *e* du frein, la lame d'acier presse la roue dont elle enveloppe presque toute la circonférence, et la vitesse peut être ralentie à volonté par le frottement. Si l'ouvrier employait toute sa force pour soulever le levier *e*, le frottement du frein suffirait pour arrêter le fardeau.

163. Depuis le commencement du XIX[e] siècle, la fonte de fer est devenue d'un usage général dans un grand nombre de constructions, et principalement dans celle des machines. Les ingénieurs et les artistes anglais, qui savent mieux que ceux d'aucune autre nation perfectionner et appliquer les découvertes utiles, ont produit une révolution dans les arts mécaniques: cette révolution est due principalement à la perfection qu'ils ont donnée au travail de la fonte.

Pour la construction des grues qui servent dans l'intérieur des grands ateliers et sur les ports, les ingénieurs anglais ont remplacé le bois par la fonte; il en résulte que ces machines ont une plus grande solidité, qu'elles durent plus longtemps et qu'elles ne sont pas sujettes à se tourmenter, lorsqu'elles sont exposées à l'intempérie de l'atmosphère.

Les *fig.* 88 et 89, tirées de l'*Encyclopédie d'Édimbourg*, représentent l'élévation latérale et l'élévation vue de face d'une grue en fonte de fer et en bois.

Elle est composée d'un fût, ou d'un arbre vertical A, en

fonte; d'une moise oblique B en bois de chêne, formant la volée, et d'une seconde moise, ou contre-fiche C, aussi en bois de chêne, qui consolide la volée; ces trois pièces, solidement assemblées, forment un triangle obliquangle disposé comme celui de la *fig.* 86.

On a donné au fût une forme convenable pour l'ajustement des pièces qui doivent lui être adaptées: il a deux branches (*fig.* 89) réunies à sa partie inférieure; elles forment un angle aigu coupé par les traverses t, t', t''; au-dessus de la troisième traverse t'', les deux branches forment un demi-cylindre; leurs prolongements sont parallèles jusqu'au sommet s, où elles sont courbées pour venir se joindre suivant la direction horizontale.

La partie inférieure du fût est terminée par un pivot; elle entre, suivant la direction verticale, dans un puits dont la profondeur est d'environ 10 pieds, en passant par l'ouverture pratiquée au milieu d'un plateau cylindrique en fonte, et le pivot vient se loger dans une crapaudine scellée au fond du puits.

La *fig.* 90 représente une section horizontale dans laquelle on voit l'ajustement du fût avec le plateau de fonte; il y a cinq galets dans l'intérieur de ce plateau, pour diminuer le frottement lorsqu'on fait tourner la grue sur son pivot.

Deux rouleaux m et m', placés sur la moise B, et la poulie fixe n qui est à son extrémité, servent à diriger la chaîne à laquelle on attache les fardeaux que l'on veut élever. La longueur de cette moise est de 21 pieds anglais ($6^m,399$); elle a 12 pouces sur $10\frac{1}{2}$ ($30^c,47$ sur $26^c,66$) près du fût, et 16 pouces sur 12 ($40^c,62$ sur $30^c,47$) vers l'extrémité qui renferme la poulie fixe.

La contre-fiche C a 10 pouces (25^c,39) d'équarrissage.

164. Un treuil avec des roues dentées et leurs pignons, est adapté au fût de cette grue; les coussinets dans lesquels tournent les arbres de ces roues, ceux de leurs pignons et les tourillons de l'arbre du cylindre *l*, sont ajustés sur les parties parallèles des branches du fût.

Le rayon de la manivelle est de 18 pouces anglais (45^c,70); celui du cylindre *l*, sur lequel s'enroule la chaîne, est de 8 pouces (20^c,31); les rayons des roues dentées, ceux de leurs pignons et leurs dentures, sont renfermés dans le tableau suivant.

Roues et pignons.	RAYONS.		Nombre des dents.
	Pouces anglais.	Centimètres.	
b	20 $\frac{1}{8}$	51,097	84
c	2 $\frac{5}{8}$	6,665	10
b'	18 $\frac{7}{8}$	47,923	80
c'	3 $\frac{7}{8}$	9,838	15
b''	14 $\frac{5}{8}$	37,133	62
c''	7 $\frac{7}{8}$	19,994	32
b'''	24 $\frac{3}{8}$	61,888	100
c'''	2 $\frac{7}{8}$	7,299	11

Il y a un engrenage constant, celui du pignon c''' avec la roue b''', et on peut le faire tourner avec l'un quelconque des trois autres engrenages simples.

En prenant la disposition représentée par la *fig.* 89, dans laquelle on voit que l'engrenage du pignon c' avec la roue b' fait tourner l'engrenage constant, on pourra se servir de la formule que nous avons trouvée (**161**) pour calculer, dans

le cas d'équilibre, le rapport de la puissance au poids du fardeau.

Le rayon de la manivelle et celui du pignon c' étant désignés par R et r', ceux de la roue b' et du pignon c''' par R′ et r''', et ceux de la roue b''' et du cylindre l par R‴ et r, la formule que nous venons d'indiquer devient

$$\frac{P}{Q} = \frac{r'r'''r}{RR'R'''};$$

en substituant les valeurs des lettres dans le second membre de cette formule, et observant que les rayons des roues et des pignons peuvent être remplacés par les nombres de leurs dents, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{15 \times 11 \times 20,31}{45,70 \times 80 \times 100} = \frac{67023}{7312000}.$$

La valeur du rapport de la puissance au poids du fardeau est une fraction irréductible; en cherchant sa valeur approchée exprimée en plus petits nombres, par la méthode des fractions continues, on trouve qu'elle est comprise entre $\frac{1}{109}$ et $\frac{10}{1091}$.

On voit à la simple inspection, que la puissance aurait un avantage plus petit que celui que nous venons de trouver, si l'on employait l'engrenage du pignon c'' avec la roue b'', et que l'engrenage le plus favorable à la puissance est celui du pignon c avec la roue b; en le substituant dans la formule, on trouvera que le rapport de la puissance au poids du fardeau est compris entre $\frac{1}{171}$ et $\frac{1}{172}$.

La description que nous venons de donner est extraite de l'*Encyclopédie d'Édimbourg*; d'après l'auteur, cette grue a

été construite à Londres en 1813, pour être placée sur le canal de grande jonction, à Paddington; son établissement a coûté 350 livres sterling (8750 fr.); on peut s'en servir avec sécurité pour élever des fardeaux du poids de 8 tonneaux, et elle pourrait même être employée occasionnellement pour élever un poids de 16 tonneaux, ou 16000 kilogrammes.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS POSÉ SUR UN PLAN HORIZONTAL.

Pression des points d'appui sur ce plan.

165. Lorsqu'un corps ne touche qu'en un seul point le plan sur lequel il est posé, si l'on veut qu'il soit en équilibre par l'action de la pesanteur, il faut, 1° que le plan soit horizontal; 2° que le centre de gravité du corps soit sur la verticale menée par le point de contact. Ces conditions étant satisfaites, la pression sur le point d'appui sera égale au poids du corps.

Un corps qui a deux points d'appui sur un plan horizontal fixe, ne sera en équilibre, par son propre poids, que dans le cas où la verticale, abaissée de son centre de gravité, tombe entre les points d'appui, sur la droite qui joint ces deux points; nous allons chercher la pression produite par chaque point d'appui sur le plan horizontal.

Soit MN (*fig.* 91) une section d'un corps posé sur un plan horizontal fixe, par ses deux points d'appui A et B; ce corps étant en équilibre par son propre poids, la verticale abaissée de son centre de gravité G, doit rencontrer la ligne droite AB en un point O situé entre A et B. Pour calculer la pression de chacun de ces points, il faut considérer le poids du corps MN comme une force R appliquée à son centre de gra-

vité G, et décomposer cette force en deux autres P et P′, qui agissent suivant les verticales PA et PB.

Les formules (30)

$$R = P + P',$$
$$RX = Px + P'x',$$

peuvent être appliquées pour déterminer les composantes P et P′; l'origine étant placée au point O, on aura

$$X = o, \quad -Px + P'x' = o, \quad P' = \frac{Px}{x'}.$$

Cette valeur de P′ étant substituée dans la première équation, il viendra

$$R = P + \frac{Px}{x'} = \frac{x + x'}{x'} P,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{Rx'}{x + x'},$$
$$P' = R - \frac{Rx'}{x + x'} = \frac{Rx}{x + x'}.$$

En observant que $x = OA$, $x' = OB$ et $x + x' = AB$, on aura les pressions :

sur le point A. . . . . $\frac{R \times OB}{AB}$,

sur le point B. . . . . $\frac{R \times OA}{AB}$.

Un corps peut être posé sur un plan horizontal, soit par un seul point, comme une pyramide ou un cône, dont le sommet formerait le point d'appui; soit par une ligne droite, comme un polyèdre posé sur une de ses arêtes; soit par

deux points séparés l'un de l'autre, comme celui auquel nous avons appliqué les calculs précédents. L'équilibre n'est stable dans aucun de ces trois cas, et la plus légère force suffit pour renverser le corps et lui communiquer un mouvement de rotation, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le plan par plusieurs points qui forment les sommets d'une face polygonale.

166. Considérons maintenant un corps qui a trois points d'appui, non en ligne droite, sur un plan horizontal; soient A, B et C (*fig.* 92), les projections de ces trois points, et soit O le point où la verticale abaissée du centre de gravité du corps rencontre le plan; le point O devra être situé dans le triangle ABC, formé par les lignes droites qui joignent les trois points d'appui, car si la verticale qui passe par le centre de gravité du corps ne rencontrait pas le plan horizontal dans l'intérieur du triangle ABC, le corps serait entraîné par sa pesanteur, et il tomberait du côté de la verticale.

On pourrait mener deux axes rectangulaires dans le plan horizontal, et calculer les pressions des trois points d'appui par le moyen de l'équation $R = P + P' + P''$, avec deux équations des moments par rapport aux axes des x et des y; on aurait trois équations renfermant les trois inconnues P, P' et P''; ainsi le problème est déterminé. Mais ces calculs peuvent être remplacés par la solution géométrique suivante.

Pour trouver les composantes des trois points d'appui, ou des angles A, B et C, menons de chacun de ces angles au point O, des lignes droites que nous prolongerons jusqu'à la rencontre des trois côtés du triangle aux points D, E et F; menons ensuite de chacun des angles, les perpendiculaires AH, BI, CK, sur les côtés opposés à ces angles; et enfin du

point O, menons les droites OL, OM, ON, perpendiculaires aux côtés du triangle.

Représentons par R le poids du corps, ou la force dirigée suivant la verticale OR; pour trouver la composante P, qui agit sur le point d'appui A, suivant la verticale AP, nous observerons: 1° que les deux triangles AHD, OMD, ont leurs côtés homologues proportionnels, par la propriété des triangles semblables; 2° que les deux triangles ABC, BOC, dont la base commune est BC, sont entre eux comme leurs hauteurs AH et OM; d'où il résulte qu'on a

$$R : P :: AD : OD :: AH : OM :: \text{aire ABC} : \text{aire BOC},$$

$$P = \frac{\text{aire BOC}}{\text{aire ABC}} \times R.$$

On trouvera de la même manière, d'après les autres parties de la figure,

$$R : P' :: BE : OE :: BI : ON :: \text{aire ABC} : \text{aire AOC},$$

$$P' = \frac{\text{aire AOC}}{\text{aire ABC}} \times R;$$

$$R : P'' :: CF : OF :: CK : OL :: \text{aire ABC} : \text{aire AOB},$$

$$P'' = \frac{\text{aire AOB}}{\text{aire ABC}} \times R.$$

Le poids R du corps, étant représenté par le triangle ABC, les parties de ce poids qui produisent les pressions des appuis situés aux angles A, B et C, seront représentées par les triangles partiels BOC, AOC et AOB, dont les bases sont les côtés opposés à ces angles.

Si l'on forme la somme des trois équations que nous ve-

nons d'obtenir, en observant que l'addition des trois coefficients de R donne l'unité, on aura

$$P + P' + P'' = R.$$

Cette équation renferme le principe d'une machine très simple, avec laquelle on peut suppléer aux grandes balances. On pose l'objet dont on veut connaître le poids sur un plateau placé horizontalement sur trois appuis; ensuite, avec un peson ou une romaine, on détermine successivement le poids capable de mettre en équilibre chacun des appuis; en additionnant ces trois poids, et retranchant celui du plateau, on aura le poids du corps placé sur le plateau. Un modèle de cet instrument de pesage a été donné par M. de Prony à la Société d'Encouragement.

Le problème sera indéterminé dans toutes les positions que l'on pourra donner aux points d'appui, s'il y en a plus de trois, parce que les conditions ne fournissent que trois équations, avec lesquelles on ne peut déterminer que trois inconnues.

Du plan incliné.

167. Un plan qui fait un angle oblique avec un plan horizontal, s'appelle plan incliné. C'est la cinquième machine simple; on s'en sert souvent pour élever des fardeaux très lourds; l'avantage qu'elle procure à la puissance consiste en ce qu'une partie du poids d'un corps placé sur un plan incliné est supporté par ce plan.

Soient le plan horizontal ABEF et le plan incliné ABCD (*fig.* 93); si l'on mène la droite LM dans le plan incliné, perpendiculairement à l'intersection commune AB des

deux plans, que par le point M on abaisse la perpendiculaire MK sur le plan horizontal, et que l'on joigne LK, on formera le triangle rectangle MKL, dont l'hypoténuse LM sera la longueur du plan incliné, le côté MK sa hauteur, et l'angle MLK son inclinaison sur le plan horizontal.

Lorsqu'une force agit sur un corps qui touche un plan immobile en un seul point, il faut deux conditions pour que le corps reste en repos: 1° la direction de la force doit être perpendiculaire au plan; 2° cette direction doit passer par le point de contact.

Si la direction PQ de la force P, qui agit sur le corps N placé sur le plan incliné AC, n'est pas perpendiculaire à ce plan, ayant prolongé PQ, de manière que la force P soit représentée par la droite QR, on pourra décomposer cette force en deux autres, l'une dirigée suivant QS, perpendiculaire au plan incliné, et l'autre dirigée dans le même plan suivant QL, perpendiculaire à l'intersection commune AB; la première sera détruite par la résistance du plan incliné, mais la seconde fera mouvoir le corps N sur ce plan, suivant la direction QL.

Lorsqu'un corps appuyé sur un plan incliné par une base, est poussé contre ce plan par une force P, l'équilibre ne peut avoir lieu que lorsque la direction de cette force est perpendiculaire au plan, et que cette direction passe par l'un des points de la base sur laquelle le corps est posé; car si la direction de la force rencontrait le plan hors de cette base, elle renverserait le corps en le faisant tourner autour de l'un des côtés de sa base.

Nous avons supposé qu'il n'y avait qu'une seule force; si plusieurs forces agissaient sur un corps posé sur un plan incliné, l'équilibre exigerait: 1° que toutes ces forces eussent

une résultante; 2° que la direction de cette résultante fût perpendiculaire au plan; 3° cette direction devrait passer par l'un des points de la base, ou de la face qui touche le plan.

Si l'on suppose que la masse du corps N, posé sur le plan incliné ABCD, soit réunie à son centre de gravité, le corps N sera réduit à un point pesant; si ce point n'était pas en équilibre, le mouvement aurait lieu sur le plan incliné suivant la ligne droite ML, perpendiculaire à la section AB du même plan avec le plan horizontal.

Dans la théorie du plan incliné, on considère les forces qui agissent sur un corps, ou sur un point pesant, par rapport à leurs directions; quel que soit le nombre de ces forces, on peut toujours les réduire à une résistance et une puissance, dont les directions sont situées dans le même plan.

Pour simplifier les figures, nous les représenterons seulement par une section, comme MLK, formée par un plan vertical qui coupe le plan incliné et le plan horizontal suivant les droites ML, LK, perpendiculaires à l'intersection AB, et qui passe par le centre de gravité du corps placé sur le plan incliné.

168. *Trouver les conditions d'équilibre entre deux forces appliquées à un corps posé sur un plan incliné.* — Soit M (*fig.* 94) le corps posé sur un plan incliné dont BC est une section faite par un plan vertical qui passe par le centre de gravité G du corps M, et dans lequel sont situées les directions des forces P et Q, appliquées à ce corps; Q étant son poids, que nous supposons appliqué au centre de gravité G, et dirigé suivant la verticale GQ. La direction de la force P est supposée passer par le centre de gravité G; mais cette direction, qui doit toujours couper la verticale GQ, pourrait

la couper au-dessus ou au-dessous du point G: il suffit que la perpendiculaire abaissée de l'intersection de la verticale et de la direction de la force P, sur le plan incliné, passe par l'un des points de la base du corps sur ce plan.

Le corps M étant en équilibre sur le plan incliné BC, la résultante de la force P et du poids Q sera détruite par ce plan; donc cette résultante doit être dirigée suivant la perpendiculaire abaissée sur le plan BC, du point G où les directions des forces se coupent. Prenons GF pour représenter le poids du corps M; du point F menons FH parallèle à la direction de la force P; du point H où cette parallèle coupe la perpendiculaire abaissée du point G sur BC, menons HE parallèle à GF, le côté GE du parallélogramme GEHF représente la force P, et si l'on représente par R la résultante des forces P et Q, on aura

$$P : Q : R :: GE : GF : GH;$$

le triangle GEH donne

$$GE : EH \text{ ou } GF : GH :: \sin GHE \text{ ou } \sin FGH : \sin EGH : \sin GEH \text{ ou } \sin FGE;$$

donc

$$P : Q : R :: \sin FGH : \sin EGH : \sin FGE.$$

Nous retrouvons ici une application de cette proposition fondamentale: que chacune des deux forces P, Q, et leur résultante R, ou la pression sur le plan incliné, est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.

Du point G menons une perpendiculaire à la direction

GP de la force P; cette perpendiculaire coupe le plan incliné BC et l'horizontale BA, qui forme la base de ce plan, aux points I et N, et les deux triangles NBI, EGH, qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, sont semblables; ainsi l'on a

$$\sin FGH = \sin EHG = \sin NBI, \quad \sin EGH = \sin NIB,$$
$$\sin GEH = \sin FGE = \sin BNI.$$

La substitution de ces valeurs donne

$$P : Q : R :: \sin NBI : \sin NIB : \sin BNI.$$

Les angles opposés au sommet NIB, GIC, sont égaux entre eux; il en est de même des angles GDB et CDP. D'ailleurs le triangle IGD est rectangle; ainsi l'angle NIB est complément de l'angle CDP, d'où il résulte que $\sin NIB = \cos CDP$. Par le point G, menons GX parallèle à la base BA; si de chacun des angles droits QGX, NGP, on retranche l'angle NGX, les restes NGQ, XGP seront égaux, et par conséquent $\sin BNI = \cos NGQ = \cos XGP$. Ces valeurs étant substituées dans les deux derniers termes de la suite proportionnelle, on aura

$$P : Q : R :: \sin NBI : \cos CDP : \cos XGP.$$

C'est-à-dire que les deux forces P, Q, et leur résultante R, ou la pression sur le plan incliné, sont proportionnelles au sinus de l'angle formé par le plan avec l'horizon, au cosinus de l'angle formé par la direction de la force P avec le plan incliné, et au cosinus de l'angle formé par la direction de la même force avec l'horizon.

La suite proportionnelle que nous avons trouvée renferme

les trois proportions suivantes :

$$P : Q :: \sin NBI : \cos CDP,$$
$$P : R :: \sin NBI : \cos XGP,$$
$$Q : R :: \cos CDP : \cos XGP.$$

La première de ces proportions fait connaître que l'équilibre aura lieu, si la puissance est au poids comme le sinus de l'inclinaison du plan est au cosinus de l'angle que forme la direction de la force P avec le plan incliné.

Soient le poids Q = 150 kilogrammes, l'inclinaison du plan, ou l'angle NBI = 40°, et l'angle CDP = 25°.

Ces valeurs étant substituées dans la proportion, il viendra

$$P : 150^{k} :: \sin 40^{\circ} : \cos 25^{\circ}.$$

log 150............	2.1760913
log sin 40°.........	9.8080675
c. log cos 25°.........	0.0427243
log P.............	12.0268831

$$P = 106^{k},385.$$

Le *poids absolu* du corps M est supposé de 150 kilogrammes, et il faudrait lui appliquer une puissance capable d'un effort égal à ce poids pour le soutenir, ou pour le mettre en équilibre dans la direction verticale ; lorsqu'il est posé sur le plan incliné BC, il tend à glisser le long de ce plan par son *poids relatif,* qui est moindre que son poids absolu ; si la puissance qui lui est appliquée agit dans la direction GP, qui fait un angle de 25° avec le plan incliné, il suffit, pour établir l'équilibre, que cette puissance soit capable de soutenir un poids de 106k,385.

En remplaçant sin NBI, ou sin ABC, par sa valeur $\frac{AC}{BC}$, la proportion précédente devient

$$P : Q :: AC : BC \times \cos CDP;$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{AC \times Q}{BC \times \cos CDP}.$$

A mesure que la valeur de cos CDP augmente, la grandeur de la force P diminue; par conséquent, pour que la force P, qui met en équilibre le corps M placé sur le plan incliné, soit la plus petite possible, il faut que cette force soit dirigée de manière que la valeur de cos CDP soit égale au rayon, ou à l'unité, ce qui a lieu lorsque $\cos CDP = \cos 0° = 1$; alors la direction de la force P coïncide avec GP′, parallèle au plan incliné BC, et la proportion devient

$$P : Q :: AC : BC.$$

C'est-à-dire que la puissance est au poids du corps, ou à la résistance, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

Lorsque la puissance P est dirigée suivant la ligne droite horizontale GX, cette direction étant parallèle à la base BA du plan incliné, elle forme l'angle $CD'X = ABC$, et l'on a

$$\cos CD'X = \cos ABC = \frac{AB}{BC};$$

en substituant cette valeur à la place de cos CDP, la proportion devient

$$P : Q :: AC : AB.$$

La puissance est au poids du corps M, comme la hauteur du plan incliné est à sa base.

Pour retenir un corps en équilibre sur un plan incliné, lorsque la direction de la puissance est parallèle à ce plan, la puissance est toujours moindre que le poids du corps, parce que l'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle.

Si la puissance agit dans une direction parallèle à la base horizontale du plan incliné, alors la puissance sera plus grande, égale ou plus petite que le poids du corps, suivant que la hauteur du plan incliné sera plus grande, égale ou plus petite que sa base.

En prenant la valeur de R dans la proportiou

$$Q : R :: \cos CDP : \cos XGP,$$

on aura

$$R = \frac{Q \times \cos XGP}{\cos CDP}:$$

c'est l'expression de la résultante des deux forces qui retiennent le corps M en équilibre sur le plan incliné BC, ou la pression que supporte ce plan.

La ligne droite GP′ étant parallèle à BC, on a l'angle CDP = PGP′, et par la même raison

$$CD'X = XGP' = XGP + PGP',$$

d'où l'on tire, en observant que l'angle CD′X = ABC, parce la droite GX est horizontale,

$$XGP = CD'X - PGP' = ABC - CDP;$$

substituant cette valeur dans celle de la résultante R, il

viendra

$$R = \frac{Q \times \cos(ABC - CDP)}{\cos CDP}.$$

Nous avons supposé que le poids Q = 150 kilogrammes, l'angle ABC = 40°, et l'angle GDP = 25°; ces valeurs étant substituées dans la formule, on aura

$$R = \frac{150 \times \cos 15^\circ}{\cos 25^\circ},$$

log 150.........	2.1760913
log cos 15°........	9.9849438
c. log cos 25°... ...	0.0427243
log R...........	12.2037594

$$R = 159,867.$$

La valeur de la résultante, ou la pression sur le plan incliné, est de 159k,867.

Supposons que la puissance P soit le terme inconnu de la proportion

$$P : R :: \sin NBI : \cos XGP;$$

en substituant, à la place des trois autres termes, les mêmes nombres que dans l'exemple précédent, il viendra

$$P = \frac{159,867 \times \sin 40^\circ}{\cos 15^\circ},$$

log 159,867	2.2037594
log sin 40°.......	9.8080675
c. log cos 15°.......	0.0150562
log P............	12.0268831

$$P = 106,385.$$

Nous retrouvons la valeur de la puissance P que nous avons obtenue dans le premier exemple.

169. *Trouver les conditions d'équilibre de deux corps attachés aux extrémités d'une corde inextensible et parfaitement flexible, qui passe dans la gorge d'une poulie fixe; ces corps étant posés sur deux plans inclinés adossés de même hauteur.* — Soient les deux corps M, M′ (*fig.* 95) attachés aux extrémités de la corde MPM′, qui passe dans la gorge de la poulie fixe N; ces deux corps sont posés sur les plans inclinés CB, CD, adossés, de même hauteur, AC, et dont les bases sont dans la même droite horizontale.

Soit P la force qui retient le corps M sur le plan incline BC, ou la tension du cordon PM; dans le cas d'équilibre, la même force P retiendra aussi le corps M′ sur le plan incliné CD, car la corde passant sur la poulie fixe N, les deux cordons MP, PM′, sont également tendus: ainsi en désignant par Q, Q′, les poids des deux corps, dirigés suivant les verticales qui passent par leurs centres de gravité G, G′, on aura les deux proportions (**168**)

$$P : Q' :: \sin ADC : \cos PG'p',$$
$$Q : P :: \cos PGp : \sin ABC;$$

en multipliant ces deux proportions terme à terme, et négligeant le facteur commun, il viendra

$$Q : Q' :: \sin ADC \cos PGp : \sin ABC \cos PG'p'.$$

Les triangles rectangles DAC, BAC, donnent

$$\sin ADC = \frac{AC}{CD}, \quad \sin ABC = \frac{AC}{BC};$$

ces valeurs étant substituées dans la dernière proportion, il viendra

$$Q : Q' :: BC \times \cos PGp : CD \times \cos PG'p'.$$

Lorsque les cordons MP, PM', coïncident avec les droites Gp, $G'p'$, parallèles aux plans inclinés, on a $\cos PGp = \cos PG'p' = \cos 0^\circ = 1$, et la proportion devient

$$Q : Q' :: BC : CD.$$

C'est-à-dire que si les cordons sont parallèles aux plans inclinés, l'équilibre aura lieu lorsque les poids des corps seront entre eux comme les longueurs de ces plans.

170. Si un corps M (*fig.* 96) placé entre deux plans inclinés BC, BE, est en équilibre, le poids de ce corps, que l'on peut supposer réuni à son centre de gravité G, et qui agit suivant la verticale HG, sera soutenu par les plans inclinés; ainsi il devra y avoir, sur la verticale qui passe par le centre de gravité, au moins un point d'où l'on puisse abaisser une perpendiculaire sur chacun des plans inclinés, de manière que chacune de ces perpendiculaires passe par l'un des points de la base du corps qui s'appuie sur le plan incliné.

Le plan qui passe par la verticale et par les perpendiculaires abaissées sur les deux plans inclinés, est perpendiculaire à ces deux plans, et par conséquent il est perpendiculaire à leur intersection commune: donc cette intersection doit être horizontale.

Soient HI, HK, les perpendiculaires abaissées du point H de la verticale qui passe par le centre de gravité G, sur les plans inclinés BC, BE, de sorte que les points I et K, où ces perpendiculaires rencontrent les plans, soient sur les

bases du corps M; c'est-à-dire que la perpendiculaire passe par le point d'appui, s'il n'y en a qu'un, et s'il y en a plusieurs qu'ils ne soient pas tous du même côté de la perpendiculaire. Prenons la partie HR de la verticale pour représenter le poids du corps M, et menons RT parallèle à HI, et RS parallèle à HK, ce qui formera le parallélogramme HSRT, dont les côtés HS, HT, représenteront les pressions sur les plans inclinés BC, BE.

Si l'on désigne par Q le poids du corps M, et que P, P', représentent les pressions de ce corps sur les plans inclinés BC, BE, le principe de la composition des forces donnera

$$Q : P : P' :: HR : HS : HT :: \sin SHT : \sin RHT : \sin RHS.$$

Menons LF parallèle à l'horizontale AD, les deux triangles RHS, BLF, auront leurs côtés respectivement perpendiculaires; donc ces triangles sont semblables; les côtés et les angles du triangle BLF étant substitués à la place de ceux du triangle RHS, dans la suite proportionnelle, il viendra

$$Q : P : P' :: LF : BL : BF :: \sin CBE : \sin DBE : \sin ABC.$$

C'est-à-dire que si le poids du corps M est représenté par le sinus de l'angle que font entre eux les deux plans inclinés, les pressions sur chacun de ces plans seront respectivement exprimées par les sinus des angles qu'ils forment avec l'horizon.

Si chacun des angles ABC, DBE, était de 60°, l'angle CBE serait aussi de 60°, et la pression sur chaque plan serait égale au poids du corps M.

Si l'angle LBF, ou CBE est droit, la direction de la force qui agit sur l'un des plans inclinés sera parallèle à l'autre

plan; en effet, l'angle HIB est droit par construction, si l'angle HSR est droit, SR et HK seront parallèles à BC: le même raisonnement s'applique aux droites TR et HI; alors le triangle rectangle LBF sera semblable à chacun des triangles rectangles BAC, BDE, et l'on aura

$$Q : P : P' :: LF : BL : BF :: BC : AB : AC.$$

Le plan incliné BE produit l'effet d'une force P' qui pousserait le corps M dans la direction KH contre le plan incliné BC; cette force peut être remplacée par une force égale p', qui tire le corps dans la direction Hp'; si cette direction est parallèle au plan incliné BC, on aura

$$p' : Q :: AC : BC;$$

on voit que cette dernière proportion est contenue dans celle qui précède.

Lorsque l'un des plans est horizontal, l'équilibre ne peut avoir lieu, en faisant abstraction du frottement, que dans le cas où la verticale menée par le centre de gravité du corps M passe par l'un des points de sa base qui s'appuie sur le plan horizontal; alors le poids du corps n'est soutenu que par le plan horizontal, et la pression sur l'autre plan est nulle.

De la vis.

171. La sixième machine simple, qui se nomme *vis*, peut être considérée comme un assemblage qui participe du levier et du plan incliné; cette machine consiste en un cylyndre dans lequel on a taillé une rainure, carrée ou trian-

gulaire, qui forme une *hélice*, dont nous allons d'abord expliquer la génération.

Soit AIBCOD (*fig.* 97) un cylindre droit, dont $AY = \frac{1}{2} AB$ est le rayon de la base; prolongez le diamètre AB, prenez, sur ce prolongement, $BB' =$ circ. AY, et achevez le rectangle BB′C′C, la surface de ce rectangle sera égale à la surface convexe du cylindre.

Partagez la génératrice BC, qui forme l'un des côtés du rectangle BB′C′C, en parties égales BE, EF, FG, etc.; par les points de division, menez les droites EE′, FF′, GG′, etc., parallèles à la base BB′, et joignez BE′, EF′, FG′, etc.; les triangles rectangles BB′E′, EE′F′, FF′G′, etc., seront égaux.

Si l'on imagine que la surface du cylindre soit enveloppée par la surface du rectangle BB′C′C, le côté B′C′ tombera sur la génératrice BC; les points B′, E′, F′, etc, coïncideront avec les points B, E, F, etc., et les hypoténuses, ou les diagonales BE′, EF′, FG′, etc., formeront la courbe continue que l'on nomme *hélice*. Cette courbe est la trace du *filet* de la vis; tous les angles KRB, KSE, etc., formés par la direction de l'hélice avec l'une des génératrices KI du cylindre sont égaux entre eux; cette propriété résulte de ce que la courbe est formée par une suite de lignes droites parallèles entre elles.

On appelle *spire* une partie de l'hélice, ou du filet de la vis, formée par la révolution de l'une des lignes droites BE′, EF′, etc., autour du cylindre; la distance entre deux spires consécutives, prise parallèlement à l'axe XY du cylindre, est partout la même.

Le filet de la vis a la forme d'un parallélépipède rectangle, ou celle d'un prisme triangulaire; dans le premier cas la vis

se nomme vis à *filet carré*, et dans le second cas elle s'appelle vis à *filet triangulaire*, ou simplement *vis triangulaire;* quelle que soit la figure du filet d'une vis, on peut le concevoir comme composé d'un nombre infini d'hélices, décrites sur des cylindres qui ont le même axe, mais dont les rayons sont de différentes longueurs.

La distance entre une spire d'un filet, et la spire correspondante du filet suivant, ou la distance AB (*fig.* 98), de deux filets consécutifs, se nomme *le pas* de l'hélice, ou *le pas* de la vis; sa hauteur comprend un vide et l'épaisseur de l'un des filets adjacents.

172. Pour faire usage de la vis, on la fait entrer dans une pièce MN qu'on appelle *écrou;* l'intérieur de l'écrou est un cylindre creusé en hélice, semblablement au filet de la vis, de sorte que le filet concave de l'écrou est rempli par le filet convexe de la vis: lorsque la vis tourne dans son écrou, elle se meut dans le sens de son axe, et pour chaque révolution elle avance d'une quantité égale au pas de la vis. Si la vis était fixe et que l'écrou fût mobile, alors pour chaque révolution de l'écrou autour de la vis, il avancerait dans le sens de l'axe d'une quantité égale au pas de la vis.

Ces deux pièces ainsi ajustées, la vis étant fixe, si les surfaces des filets de la vis et de l'écrou qui sont en contact étaient parfaitement polies, et qu'il n'y eût point de frottement, l'action de la pesanteur qui agit sur l'écrou suffirait pour le faire glisser sur les filets de la vis, et pour le mettre en équilibre, il faudrait lui appliquer une puissance capable de contre-balancer l'effet de la pesanteur; c'est en partant de cette hypothèse que nous allons chercher la solution du problème suivant.

173. *Trouver les conditions nécessaires pour établir l'é-*

quilibre de la vis. — Soit une vis dont l'écrou est mobile, l'axe de cette vis étant vertical; en faisant abstraction du frottement, l'écrou abandonné à son propre poids, ou chargé d'un poids quelconque, descendrait en tournant, et il parcourrait tous les filets inférieurs de la vis en glissant sur eux comme sur des surfaces inclinées.

Considérons une force P appliquée à l'écrou MN, par le moyen d'une barre, ou d'un levier CD, perpendiculaire à l'axe de la vis; supposons que cette force agisse perpendiculairement au levier CD, dans le plan horizontal mené par ce levier.

Si l'écrou ne touchait qu'en un seul point la surface du filet, pendant le mouvement de cet écrou, le point de contact décrirait une hélice dont le pas serait le même que celui de la vis; on pourrait concevoir cette hélice décrite sur un cylindre qui aurait pour rayon la distance du point décrivant à l'axe de la vis.

Soit AIBCOD (*fig.* 97) ce cylindre, m le point de l'écrou qui décrit l'hélice CVHUGm....; le point m sera pressé par une force verticale, ou par un poids q; supposons qu'il soit retenu par une force horizontale f, dirigée suivant la droite fm tangente au cylindre. On pourra considérer le point m comme s'il était sur un plan incliné dont la hauteur, que nous représenterons par h, serait égale au pas de la vis, et dont la base est égale à la circonférence du cylindre.

Soit r le rayon du cylindre; le rapport de la circonférence au diamètre étant représenté par π, la circonférence sera exprimée par $2\pi r = BB'$.

La force dirigée horizontalement, qui retient un corps en équilibre sur un plan incliné, est au poids de ce corps comme la hauteur du plan est à sa base; ainsi l'on aura la pro-

portion

$$f : q :: h : 2\pi r.$$

Menons par le point m, une ligne droite horizontale qui rencontre au point c l'axe du cylindre; considérons cette droite comme un levier mobile autour du point c et auquel la force f est appliquée; décomposons cette force en deux autres appliquées aux points b et c du même levier, suivant des directions parallèles à mf; la composante appliquée au point d'appui c sera détruite par la résistance de ce point; en désignant par p l'autre composante, appliquée au point b, et observant que le bras de levier $mc = r$, on aura

$$p : f :: r : bc;$$

en multipliant terme à terme cette proportion par celle qui précède, et négligeant les facteurs communs, il viendra

$$p : q :: h : 2\pi . bc,$$

c'est-à-dire que la puissance horizontale qui tient le point m en équilibre, est au poids qui agit sur ce point, comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.

Puisque cette proportion ne renferme pas le rayon r du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, ce rayon peut être pris à volonté, d'où il résulte que pour retenir un point pesant en équilibre sur une hélice, la force doit être la même pour l'hélice la plus près de l'axe que pour l'une quelconque de celles qui en sont plus éloignées, pourvu que toutes ces hélices aient le même pas.

174. Nous n'avons considéré qu'un seul point pesant, re-

tenu en équilibre sur nne hélice, et la règle que nous avons trouvée est applicable à toutes les positions que l'on peut donner au point pesant, sur la snrface saillante du filet de la vis, quelle que soit sa profondeur; il faut prouver maintenant que cette règle aurait encore lieu pour un nombre quelconque de points de contact, et par conséquent qu'elle exprime les conditions d'équilibre de la vis et de l'écrou.

En effet, on peut se représenter la pression de l'écrou MN (*fig.* 98) sur les filets de la vis, comme un poids Q, décomposé en autant de points pesants, ou de poids partiels, q, q', q'', etc., égaux entre eux, qu'il y a de points de contact; si l'on décompose pareillement la force P, qui retient l'écrou en équilibre, en autant de forces partielles p, p', p'', etc., égales entre elles, qu'il y a de points pesants, chacun de ces points sera retenu en équilibre par l'une des forces; en désignant par h la hauteur du pas de la vis, et par R le rayon CD du cercle que la puissance tend à décrire, on aura

$$p : q :: h : 2\pi R,$$
$$p' : q' :: h : 2\pi R,$$
$$p'' : q'' :: h : 2\pi R,$$
$$\text{etc.,} \quad \text{etc.}$$

Cette snite de rapports égaux donne

$$p + p' + p'' + \text{etc.} : q + q' + q'' + \text{etc.} :: h : 2\pi R;$$

d'ailleurs on a

$$p + p' + p'' + \text{etc.} = P, \quad q + q' + q'' + \text{etc.} = Q;$$

donc $$P : Q :: h : 2\pi R.$$

On aurait la même proportion si l'on supposait l'écrou fixe et la vis mobile; ainsi quelle que soit celle de ces deux pièces à laquelle la puissance est appliquée, elles seront en équilibre si la puissance qui tend à faire tourner la pièce mobile, en décrivant un cercle perpendiculaire à l'axe de la vis, est au poids, ou à la résistance qui agit dans le sens de cet axe, comme la hautenr du pas de la vis est à la circonférence que la puissance tend à décrire.

Vis sans fin.

175. La vis sans fin (*fig*. 99) est composée d'une vis qui a seulement trois ou quatre filets carrés, et d'une roue dentée dont le plan passe par l'axe de la vis; dans cette machine l'écrou est remplacé par la rone dentée; lorsqu'on fait engrener les dents de cette roue entre les filets de la vis, et que l'on fait tourner cette vis autour de son axe, les dents en contact sont poussées par le filet, et d'autres dents viennent successivement s'engager, ce qui fait tourner la roue et le cylindre sur lequel s'enroule la corde à laquelle est attaché le fardeau Q que l'on vent élever.

Soient P la force qui tend à tourner la vis, par le moyen de la manivelle LMN dont le rayon $LM = R$, h la hauteur du pas de la vis, et π la circonférence dont le diamètre est l'unité; représentons par Y l'effort que les dents de la roue produisent contre le filet de la vis, parallèlement à son axe; puisque cette vis est en équilibre, nous aurons

$$P : Y :: h : 2\pi R.$$

La roue dentée dont le rayon $cd = R'$, et le cylindre con-

centrique qui a pour rayon $ce = r$, représentent un treuil par le moyen duquel la force Y et le fardeau Q sont en équilibre, ce qui donne

$$Y : Q :: r : R';$$

en multipliant ces deux proportions terme à terme, il vient

$$P : Q :: hr : 2\pi R \times R'.$$

C'est-à-dire que l'équilibre aura lieu dans la vis sans fin, si la puissance est au poids du fardeau, ou à la résistance, comme le produit du pas de la vis par le rayon du cylindre, est au produit de la circonférence que la puissance tend à décrire par le rayon de la roue dentée.

Supposons que la puissance P, appliquée à la manivelle LMN, soit de 25 livres; le pas de la vis $h = 3$ lignes, le rayon du cylindre $r = 3$ pouces, le rayon de la manivelle $R = 9$ pouces, et le rayon de la roue dentée $R' = 6$ pouces 6 lignes; le rapport de la circonférence au diamètre $\pi = 3{,}1416$: ces nombres étant substitués à la place des lettres, on aura

$$Q = \frac{25 \times 2 \times 3{,}1416 \times 9 \times 6{,}5}{0{,}25 \times 3} = 12252^{\text{lb}}{,}24.$$

Une puissance de 25 livres, appliquée à la manivelle, serait suffisante pour mettre en équilibre un fardeau du poids de 12252 livres, en faisant abstraction des résistances produites par le frottement et la raideur de la corde.

176. La vis est l'une des machines simples que l'on emploie le plus fréquemment dans les arts; les applications sui-

vantes donneront une idée de l'avantage que cette machine procure à la puissance.

Parmi les applications ordinaires de la vis, on distingue les presses que l'on nomme presses à vis; elles servent, soit à comprimer les matières susceptibles d'être réduites à un plus petit volume, soit à serrer solidement les objets divisés en plusieurs pièces que l'on veut réunir : c'est à cet usage que la presse à deux vis triangulaires, en bois, est ordinairement employée.

Les *fig.* 100 et 100[a], qui représentent la projection verticale de l'une de ces presses, et le plan de l'un de ses écrous, sur l'échelle de $\frac{1}{12}$, suffisent pour en indiquer le mécanisme.

La vis combinée avec le levier, fournit un appareil d'une constrnction simple et facile, avec lequel la force d'un petit nombre d'hommes est suffisante pour élever les pſns grands fardeaux et les blocs de pierre les plus lourds que l'on puisse employer dans la construction des monuments.

Soient M et N (*fig.* 101) deux vis triangulaires en bois; la tête de chacune de ces vis est percée d'un trou perpendiculaire à son axe, pour recevoir un levier; elles traversent leurs écrous taillés dans la pièce de bois DE, et leurs extrémités inférieures sont appuyées sur le support fixe AB, dans des trous creusés en forme de crapaudines. Si l'on a deux autres vis pareilles, disposées de la même manière, ces deux paires de vis formeront un équipage avec lequel on pourra élever un fardeau posé sur la traverse H, soutenue par les écrous.

La hauteur du pas de la vis est de 20 millimètres; si l'on applique une puissance de 25 kilogrammes à chaque vis, et que cette puissance agisse à l'extrémité d'un levier de 1 mètre

de longueur, en désignant par q le poids du fardeau qui peut être mis en équilibre par l'une des vis, on aura

$$q = \frac{25 \times 2 \times 3,1416 \times 1}{0,020} = 7844.$$

D'où il résulte que les quatre vis agissant simultanément, le poids du fardeau qu'elles tiendront en équilibre sera de $7844 \times 4 = 31376$ kilogrammes.

On a employé cinq équipages pareils à celui que nous venons de décrire, pour élever l'un des bateaux en fer construits dans la fabrique de Charenton. Les pièces, construites et ajustées dans les ateliers de la fabrique, avaient été successivement transportées pour les assembler et monter le bateau sur le bord de la Seine; on y avait déjà placé les cylindres et quelques autres parties des machines à vapeur lorsqu'il a été élevé avec les cinq équipages de vis, dans les premiers jours de novembre 1825, pour retirer le chantier sur lequel il était posé; ensuite on l'a descendu sur un plan incliné, que l'on avait établi avec sept grandes pièces de sapin garnies de bandes de fer, pour le lancer dans la rivière.

C'est par le moyen de la vis que l'on frappe, dans les grands ateliers du Gouvernement, les médailles et les monnaies; elle est aussi employée pour des travaux analogues dans divers établissements métallurgiques, et l'on s'en sert pour des empreintes sur le papier lorsqu'elles exigent une forte pression.

La vis est la pièce principale de la presse d'imprimerie, qui a rendu d'éminents services, en mettant les moyens d'instruction à la portée de toutes les classes de la société; cette

machine a été employée pendant environ 300 ans à peu près telle que son inventeur était parvenu à la construire.

177. Dans la presse d'imprimerie, comme dans la plupart des autres machines, le bois a été remplacé par la fonte de fer. Ce n'est pas le seul changement qui ait été fait à la presse d'imprimerie: sa forme a été modifiée par lord Stanhope; il en a amélioré le mécanisme, en conservant le principe du premier inventeur, et la presse qui porte son nom, dont la construction est bien exécutée par divers ingénieurs-mécaniciens, est généralement adoptée par les imprimeurs depuis environ vingt ans. Les presses anciennes ont été remplacées par des presses à la Stanhope dans l'imprimerie de M. Bachelier, où je suis allé les observer; c'est sur celle de ces presses qui est regardée comme la meilleure, et qui fonctionne depuis deux années, que j'ai pris les mesures suivantes.

La *fig.* 102 représente la presse de Stanhope en perspective, et la *fig.* 103 est une projection verticale de cette même presse suivant sa longueur; elle est fixée avec des boulons à écrous sur un pied MNO en bois de chêne, dont la hauteur est de $0^m,252$; la longueur de la plus longue pièce est de $0^m,975$ et sa largeur de $0^m,216$; la traverse MN a $0^m,961$ de longueur et $0^m,311$ de largeur; ces deux pièces sont assemblées à angle droit suivant la forme d'un T ou d'une croix.

On distingue trois parties dans la presse de Stanhope: la première partie comprend le corps de presse ABC, avec la platine P soutenue par le poids Q suspendu au levier L; le mécanisme forme la deuxième partie: il est composé de la vis dans son écrou fixe E, de l'arbre vertical F auquel on imprime le mouvement de rotation par le moyen du barreau H,

et du tiran T par lequel le mouvement de l'arbre vertical est transmis à la vis; la troisième partie se nomme le train: elle est composée d'un châssis horizontal en fer GIK, qui traverse le corps de la presse auquel il est fixé vers l'une de ses extrémités; son autre extrémité est soutenue par le support vertical U: ce châssis est une espèce de chemin de fer sur lequel on pose une table de fonte bien dressée qu'on appelle le marbre, et c'est sur ce marbre que l'on place la forme qui renferme les caractères qui doivent imprimer l'un des côtés d'une feuille de papier. Les deux cadres GIR et RS sont le tympan et la frisquette; ils sont assemblés par des charnières, afin de pouvoir les rabattre sur la forme.

On communique un mouvement de va-et-vient à l'assemblage du marbre, de la forme et du tympan, par le moyen de la manivelle V, en faisant tourner un rouleau placé sous le châssis de fer; deux cordes dont l'un des bouts est attaché à chacune des extrémités de ce châssis et l'autre bout fixé au rouleau, font avancer ou reculer cet assemblage en s'enroulant alternativement, en sens contraire, d'environ trois tours sur le rouleau.

Le poids de fonte Q de la presse que j'ai observée dans l'imprimerie de M. Bachelier, est un solide de révolution; il est représenté (*fig.* 104 et 105) par ses projections verticale et horizontale; sa forme est celle d'un tronc de cône: il a une face plane, et l'on a creusé dans ses parties supérieure et inférieure, deux parallélipipèdes entre lesquels il y a une séparation. J'ai cherché le volume de ce corps par les opérations suivantes, pour en déterminer le poids.

La surface génératrice est un trapèze dont la hauteur est de $0^m,216$; il a $0^m,103$ pour sa base supérieure et $0^m,110$ pour sa base inférieure. En multipliant la demi-somme de

ses bases par sa hauteur, on trouve que sa surface est de $0^{m^2},0229$.

Il faut déterminer la position de son centre de gravité : on trouvera par la règle (44), que sa distance à la base inférieure du trapèze est de $0^m,107$. L'arc que ce centre décrit a pour rayon $0^m,052$; cet arc est de 265 degrés et il a une longueur de $0^m,241$.

D'après la méthode centrobasique (60), on aura, pour le volume du solide de révolution. . . . . $0^{m^3},005543$

Ajoutant le prisme qui a pour base le triangle *abc*, dont la base $ab = 0^m,163$ et la hauteur $cd = 0^m,075$. . . . . 0 ,001296

0 ,006839

Retranchant les deux parallélipipèdes qui ont la base commune $0^m,162 \times 0,054$ et dont la somme des hauteurs est de $0^m,126$, ce qui donne pour leur volume. . . . . 0 ,001132

La différence ou le volume qu'il s'agissait de trouver est de. $0^{m^3},005707$

En multipliant par ce volume le poids de 1 mètre cube de fonte, qui est de 7207 kilogrammes, on trouvera que le poids $Q = 41^k,113$; les imprimeurs m'ont dit que ce poids pèse environ 80 livres, ce qui diffère peu du résultat des calculs précédents.

C'est par le moyen du levier L que le poids Q agit sur la presse ; on peut rapprocher ce poids du corps de la presse ou l'en éloigner, dans la position où il est actuellement fixé avec une vis de pression : la longueur de son bras de levier est de $0^m,419$. L'autre bras de levier est une fourche dans laquelle entre la partie supérieure de la platine ; elle a deux goupilles

qui sont posées sur les branches du levier, à une distance de $0^m,035$ de l'axe de rotation, et d'après le principe du levier (**82**), on a la proportion suivante :

$$0,035 : 0,419 :: 41,113 : x = 492,18 ;$$

c'est-à-dire que pour mettre le poids Q en équilibre, l'action de la puissance, ou le poids de la platine avec celui des pièces qu'elle fait mouvoir à sa partie supérieure, doit être de $492^k,18$; lorsqu'on a tourné le barreau, ce poids le ramène à sa position de repos, et par conséquent il doit être de plus de 500 kilogrammes.

L'arbre vertical F dans lequel est emmanché le barreau H est en fer forgé ; son extrémité supérieure porte une tête dans laquelle on a ajusté l'un des bouts du tiran T avec un boulon ; on a creusé, dans cette tête, une gorge dont la partie saillante vient en contact avec le tiran, ce qui arrête le mouvement du barreau toujours au même point ; et, pour adoucir le choc, on place un petit corps moelleux dans la gorge de la tête de l'arbre.

L'extrémité supérieure de la vis porte aussi une tête en fonte qu'on nomme la virgule, dans laquelle est pareillement ajusté, avec un boulon à écrou, l'autre bout du tiran, et en outre il est encore attaché au corps de la presse avec une petite chaîne, pour prévenir les accidents qui pourraient arriver si la rupture de la virgule ou de son écrou permettait au tiran de s'échapper.

Pour laisser passer le boulon qui assemble la virgule avec le tiran, on a pratiqué dans celui-ci une ouverture dont la longueur est de $0^m,108$; une vis de pression v entre dans un écrou taraudé au bout du tiran : le bout de cette vis vient

40

s'appliquer contre une partie plate d'un anneau dans lequel passe l'écrou, et en la tournant on peut faire avancer ou reculer la virgule. Cette disposition a pour objet de régler la pression; elle produit les effets suivants.

La vis de pression étant détournée, de manière que le boulon de la virgule soit à l'extrémité la plus éloignée qu'il puisse atteindre, et le barreau étant successivement dans sa position de repos et à l'extrémité de sa course, les distances de la platine au marbre sout de $0^m,040$ dans la première position et de $0^m,029$ dans la seconde; lorsque le boulon de la virgule est à l'autre extrémité de l'ouverture du tiran, ces mêmes distances sont de $0^m,029$ et $0^m,018$: c'est entre ces deux limites que l'on fixe le boulon de la virgule, pour régler la pression de la platine sur le tympan qui couvre la forme dans laquelle sont renfermés les caractères.

178. Nous avons fait connaître (**128**) les moyens qui ont été employés pour traîner, depuis le quai des Ormes jusqu'à la place Royale, le bloc de marbre de Carrare qui a servi à sculpter la statue équestre de Louis XIII; c'est avec des vis que ce bloc a été élevé sur son piédestal: nous allons expliquer succinctement les préparatifs et les manœuvres de cette opératiou; nous chercherons ensuite, par le calcul, l'effet théorique de la puissance capable de le mettre en équilibre.

Dans la face qui doit former la base du bloc de marbre, on a taillé une feuillure dont l'épaisseur est de 7 pouces; sa largeur est de 10 pouces suivant chacun des grands côtés, et de 14 pouces suivant les petits côtés.

Le bloc a été conduit, avec des cabestans et des crics, près du piédestal; on l'a placé dans un châssis composé de quatre pièces de bois de sapin assemblées avec des boulons: leur

équarrissage était de $10\frac{1}{2}$ sur $9\frac{1}{2}$ pouces. La feuillure du bloc de marbre a été posée sur douze crochets en fer, de 3 pouces de large et 2 pouces d'épaisseur, qui embrassaient les côtés du châssis auquel ils étaient fixés avec des boulons à écrous; on avait posé des cales en bois sur ces crochets, pour empêcher le contact du marbre avec le fer.

On a encastré dans le châssis six écrous en cuivre à filets carrés; les vis qui entrent dans ces écrous sont en fer: leur diamètre est de 2 pouces 9 lignes; la tête de chaque vis est percée de deux trous perpendiculaires entre eux, de 1 pouce de diamètre, et la partie inférieure de la tige descend dans une crapaudine en cuivre fixée dans une pièce de bois placée sous le châssis. On tourne ces vis avec des leviers en fer dont la longueur est d'environ 3 pieds.

Il sera facile de reconnaître toutes les parties de cet assemblage dans la *fig.* 106, qui représente en élévation, sur l'échelle de $\frac{1}{32}$, une esquisse du bloc de marbre dans son châssis, placé devant le piédestal sur lequel il doit être élevé.

On voit dans la *fig.* 106ᵃ une projection de l'une des vis sur une échelle double, et la *fig.* 106ᵇ représente son écrou dessiné en perspective.

Le poids du bloc de marbre est d'environ 110 milliers; il faut y ajouter le poids du châssis avec sa ferrure, qui peut être évalué à 2000 livres: ainsi la puissance doit être suffisante pour élever un poids de 112 milliers. Pour déterminer la puissance capable de mettre ce poids en équilibre, avec les six vis dont le pas est de 5 lignes, nous supposerons que la longueur de chaque levier, depuis l'axe de la vis jusqu'au point d'application de la résultante des forces appliquées à ce levier, est de 2 pieds 3 pouces, ou 27 pouces; ces valeurs

étant substituées à la place des lettres dans la formule suivante, déduite de la proportion (**174**),

$$P = \frac{Qh}{2\pi R},$$

on aura

$$P = \frac{112000 \times \frac{1}{12}}{2 \times 3,1416 \times 27} = \frac{56000}{6,2832 \times 27 \times 12};$$

en calculant par logarithmes, on trouve

log 56000......	5.7481880
c. log 6,2832....	9.2018191
c. log 27........	8.5686362
c. log 12........	8.9208188
log P.........	32.4394621

$$P = 275,0819.$$

Pour mettre en équilibre le bloc de marbre et son châssis, il faudrait appliquer au levier de chacune des vis $\frac{1}{6}P = 45^{lb},847$; mais lorsqu'on veut passer de l'équilibre au mouvement, chacune de ces forces doit être augmentée d'une quantité suffisante pour vaincre le frottement de la vis, qui absorbe une partie considérable de la puissance.

L'opération dont nous venons de décrire les principales parties, a été exécutée dans le mois de septembre 1825; un échafaud, soutenu par quatre fortes pièces de bois, était établi autour de la base supérieure du piédestal, dont la hauteur est à peu près de 12 pieds au-dessus du sol, et sur laquelle on avait élevé, par des procédés semblables à ceux que nous venons de faire connaître, mais avec quatre vis seulement, un parallélipipède rectangle en marbre, d'environ 8 pouces d'épaisseur.

Les charpentiers et les serruriers ont travaillé trois semaines pour retourner le grand bloc de marbre, le faire avancer vers le piédestal et le placer dans son châssis; toutes les dispositions pour l'élever étaient terminées le 14 septembre, et le 29 il était à la hauteur du piédestal.

Le 23 septembre il y avait vingt ouvriers employés à tourner les vis; trois ouvriers étaient appliqués à chacun des leviers de quatre vis, et il y en avait quatre à chaque levier des deux autres vis, dont deux agissaient en poussant le levier et les deux autres en le tirant.

Pour faire agir simultanément tous ces ouvriers, l'un d'entre eux commandait la manœuvre; à chaque impulsion le mouvement communiqué aux vis leur faisait faire un quart de révolution, et pendant cinq minutes le mouvement a été répété 18 fois, c'est-à-dire qu'ils ont fait faire aux vis $\frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$ tours, ce qui fait 54 tours par heure. Cette observation a été faite lorsque les ouvriers ont repris le travail, immédiatement après leur dîner.

Le 27 septembre il n'y avait que dix-sept ouvriers; trois de ces ouvriers étaient appliqués à chacun des leviers de cinq vis, et deux seulement au levier de la sixième vis; pendant trois minutes ils ont donné 10 impulsions, qui ont fait tourner les vis de $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ tours, ce qui donne 50 tours par heure. Une troisième observation, du 28 septembre, a donné le même résultat.

Chaque révolution élevait le bloc et son châssis de la hauteur du pas des vis, qui est de 5 lignes ou $\frac{5}{144}$ pied, et par conséquent dans une heure il était élevé de $\frac{5}{144} \times 50 = \frac{125}{72}$ pied; pour l'élever à la hauteur du piédestal, qui est de 12 pieds,

il n'aurait fallu que $\frac{12 \times 72}{125} = \frac{864}{125} = 6$ heures 55 minutes de travail continu; mais après avoir élevé le bloc à 7 ou 8 pouces de hauteur, il fallait s'arrêter, pour poser une rangée du grillage; ensuite on détournait les vis, et la pression exercée sur le grillage faisait perdre une partie de la hauteur que l'on avait gagnée.

Quoique les détails de cette opération ne soient pas complets, ce que nous venons de rapporter suffit pour faire voir que pour appliquer avec succès la théorie, il faut savoir tenir compte des causes qui en modifient les résultats.

Du coin.

179. On appelle *coin* un prisme triangulaire droit ABCDEF (*fig.* 107) de bois, de fer ou d'autre métal, que l'on introduit dans un corps par une fente, ou entre les parties d'un système de corps, en le frappant avec un marteau, ou tout autre instrument, soit pour fendre le corps et le diviser en deux parties, soit pour séparer plusieurs corps, ou les serrer les uns contre les autres par une forte compression, ou pour soulever un fardeau très lourd.

La face ABEF, sur laquelle on frappe, se nomme la tête du coin; l'arête CD, que l'on introduit dans la fente, se nomme le tranchant, et les deux faces ACDF, BCDE, s'appellent les côtés du coin.

Puisque le coin ABCDEF est un prisme droit, ses trois arêtes AF, BE et CD sont égales entre elles, la tête et les deux côtés sont des rectangles, et l'on a

$$ABEF : ACDF : BCDE :: AB \times AF : AC \times AF : BC \times BE :: AB : AC : BC.$$

Donc à la place de la tête ABEF du coin et de ses côtés ACDF, BCDE, on peut substituer les lignes droites AB, AC, BC, qui sont dans le même rapport, c'est-à-dire que le coin peut être représenté par le triangle ABC, qui forme son profil.

La puissance appliquée au coin, dans les usages ordinaires de cette machine, est la percussion produite par les coups de marteau que l'on frappe sur sa tête, et l'obstacle opposé à cette puissance est la résistance des parties du corps que l'on veut séparer. Nous ne pouvons pas évaluer cette résistance comme nous l'avons fait pour les autres machines, car nous ne connaissons pas la force de cohésion des parties intérieures qui forment la contexture des corps; mais si l'on suppose la puissance connue, il sera facile de déterminer les efforts qu'elle exerce, perpendiculairement aux deux côtés du coin, contre l'obstacle, ou contre la résistance que l'on se propose de vaincre.

Nous supposerons que la direction de la puissance est perpendiculaire à la tête du coin; si cette direction était oblique, on pourrait décomposer la puissance en deux parties, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à la tête du coin; la première produirait l'effort contre la résistance, et la seconde n'aurait d'autre effet que celui de faire glisser le marteau.

180. *Le coin* ABC (*fig.* 108) *étant enfoncé dans une fente faite à la partie supérieure du corps* MSXYTN, *posé sur le plan fixe* XY, *par le moyen d'une puissance* P, *qui agit perpendiculairement à la tête* AB *du coin; trouver les efforts que cette puissance produit contre les deux branches de la fente pour les séparer.* — Puisque la puissance P, qui agit suivant la droite PR perpendiculaire à AB, est détruite par les parties MX, NY, du corps MSXYTN, dont la ré-

sistance arrête l'enfoncement du coin, il y a un ou plusieurs points sur la droite PR, d'où l'on peut abaisser les perpendiculaires DP′, DP″, sur les côtés AC, BC du coin, de manière que les points où ces perpendiculaires percent les côtés du coin soient dans l'intérieur des figures formées par les parties du corps appliquées contre le coin; en supposant que les côtés du coin touchent les faces intérieures de la fente en plusieurs points: si chaque partie MX, NY du corps ne touchait le coin qu'en un seul point, les perpendiculaires abaissées d'un point D de la droite PR sur les côtés AC, BC, du coin, devraient passer par les points de contact. On voit, d'après ces considérations, que le coin a beaucoup d'analogie avec le plan incliné.

La puissance P peut être appliquée au point D de sa direction. Supposons qu'elle soit représentée par la longueur DH; menons HF, HE, respectivement parallèles à DP′, DP″; la figure DEHF est un parallélogramme, et les côtés DE, DF, représentent les efforts de la puissance P pour séparer les parties MX, NY, du corps; les deux triangles DEH, ABC, ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, par conséquent ces triangles sont semblables, et en désignant par P′, P″, les composantes de la puissance P représentées par les droites DE, DF, on aura

$$P : P' : P'' :: DH : DE : DF \text{ ou } EH :: AB : AC : BC;$$

d'où l'on tire

$$P : P' + P'' :: AB : AC + BC.$$

C'est-à-dire que la puissance est à la somme des efforts qu'elle exerce, pour séparer le corps en deux parties, comme la tête du coin est à la somme de ses deux côtés.

Cette proportion fait voir que l'avantage de la puissance, pour enfoncer le coin entre les deux parties du corps, est d'autant plus grand que la tête du coin est plus petite, par rapport à ses côtés, ou que le tranchant du coin est plus aigu; mais alors le coin touche le corps sur de plus grandes surfaces, et une partie considérable de l'effort transmis par la puissance est absorbée par le frottement.

On rapporte au coin un grand nombre d'outils et d'instruments en usage dans les arts et métiers: tels sont les cognées, les haches, les ciseaux, les fers à raboter et les autres outils tranchants; les outils à percer, les clous, les pieux, etc.

Si les côtés AC et BC du coin sont égaux (*fig.* 109), et que la droite PH, suivant laquelle la puissance P agit, soit perpendiculaire sur le milieu de la tête AB du coin, alors le triangle ACB sera isoscèle; les deux composantes P′ et P″ seront égales, et la proportion précédente deviendra

$$P : 2P' :: AB : 2AC \quad \text{ou} \quad P : P' :: AB : AC.$$

On voit, par cette dernière proportion, que la puissance est à l'action qu'elle produit sur le corps, perpendiculairement à chaque côté du coin, comme la tête du coin est à l'un de ses côtés.

181. Lorsque le coin ABC (*fig.* 110) est employé pour écarter deux corps S et S′, posés sur un plan fixe XY, et pour exercer une forte pression, en séparant ces corps, l'action produite par la puissance sur chaque côté du coin se décompose en deux forces, dont l'une est détruite par la résistance du plan fixe, et l'autre tend à écarter la partie du corps qui se trouve sur sa direction.

Puisque les deux composantes P′ et P″ de la puissance P

sont représentées par les droites DE, DF, ou par les côtés AC, BC du triangle ABC, elles peuvent être considérées comme ayant leurs points d'application aux points de contact a et a'; du point a, sur la direction de la force P′, prenez $ac = \text{DE}$, et sur la direction de la force P″ prenez $a'c' = \text{DF}$; menez ab parallèle au plan XY sur lequel les corps S et S′ sont placés; menez ad perpendiculaire au même plan, et achevez le parallélogramme $abcd$, qui sera un rectangle; décrivez de la même manière, de l'autre côté du coin, le rectangle $a'b'c'd'$.

D'après ces constructions, la force P′ se décompose en deux autres forces, dont l'une p' est représentée par le côté ab du rectangle $abcd$, et l'autre, qui est représentée par le côté ad perpendiculaire au plan XY, est détruite par la résistance de ce plan. La force P″ est décomposée de la même manière en deux autres forces, dont l'une p'' est représentée par $a'b'$, et l'autre, qui est représentée par $a'd'$, est détruite par le plan fixe XY.

En considérant les deux forces P′ et p', on a

$$\text{P}' : p' :: ac : ab;$$

on a aussi la proportion

$$\text{P} : \text{P}' :: \text{AB} : \text{AC}.$$

Les deux triangles rectangles abc, AIC, ont leurs côtés perpendiculaires; donc ces triangles sont semblables, ce qui donne

$$ac : ab :: \text{AC} : \text{IC};$$

en multipliant ces trois proportions terme à terme, et supprimant les facteurs communs, il viendra

$$\text{P} : p' :: \text{AB} : \text{IC}.$$

On trouverait un résultat semblable pour la force p'', qui agit de l'autre côté du coin, d'où il résulte que la puissance appliquée perpendiculairement sur le milieu de la tête du coin est à la pression qu'elle produit sur chacun de ses côtés, comme la tête du coin est à sa hauteur.

Principe des vitesses virtuelles.

182. On a vu, par les détails que nous avons donnés dans ce chapitre, comment on peut se servir du principe de la composition des forces, ou de la règle du parallélogramme des forces, pour résoudre les problèmes qui ont pour objet de trouver les conditions qui doivent être satisfaites dans l'équilibre des machines simples et des diverses combinaisons de ces machines.

Nous allons nous occuper d'un autre principe général d'équilibre qui peut être appliqué utilement, dans plusieurs cas, pour chercher les solutions de ces mêmes problèmes.

Ce principe est celui qu'on a nommé *principe des vitesses virtuelles;* nous en donnerons seulement une explication détaillée: la preuve sera fondée sur la conformité des résultats avec ceux qu'on a trouvés par l'application du principe de la composition des forces; quant à la démonstration rigoureuse, elle exigerait une analyse trop compliquée pour être placée ici, on la trouvera dans les Traités de Mécanique rationnelle.

On entend par vitesse virtuelle la vitesse qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir, et qu'il recevrait effectivement dans le premier instant où l'équilibre viendrait à être rompu.

Considérons un levier droit horizontal dont les extrémités sont chargées de deux poids en équilibre; si par une cause

quelconque l'équilibre vient à se rompre, le levier prendra un mouvement de rotation sur son appui; les petits arcs décrits par ses extrémités, dans le premier instant, seront les vitesses virtuelles, et en les projetant, on aura les vitesses virtuelles estimées suivant les directions des puissances représentées par ces poids.

Le principe des vitesses virtuelles consiste en ce que des forces, ou des puissances, sont en équilibre lorsqu'elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant leurs directions, ou suivant les prolongements de ces directions.

Les forces sont toujours positives, mais les vitesses virtuelles des forces estimées suivant leurs directions, et les vitesses virtuelles des forces estimées suivant les prolongements de leurs directions, doivent être prises avec des signes contraires; si les premières sont positives les secondes seront négatives.

Cherchons maintenant une formule qui soit l'expression algébrique du principe des vitesses virtuelles que nous venons d'énoncer.

Soient P, P', deux forces représentées par les droites CP, CP' (*fig.* 111); soit R la résultante de ces forces, représentée par la droite CR; menons par le point C une ligne droite indéfinie VX, et abaissons sur cette droite les perpendiculaires Px, $P'x'$, Rx''; désignons par a, α, α', les angles RCV, PCX, P'CX; en prenant les composantes des forces R, P et P', estimées suivant la droite VX, on aura l'équation

$$R\cos a = P\cos\alpha + P'\cos\alpha'. \qquad (1)$$

Supposons que l'intensité de la résultante R reçoive un

accroissement, l'équilibre sera détruit, et dans le premier instant du mouvement, le point C parcourra la distance CD, que nous pouvons supposer dans la direction de la ligne droite VX, parce que cette droite, qui passe par le point C, est menée à volonté dans le plan des forces; la droite CD se nomme la *vitesse virtuelle* du point C.

Par le point D, abaissons les droites Dr, Dp, Dp', respectivement perpendiculaires sur les directions des forces R, P, P', et faisons, pour simplifier, $Cr = r$, $Cp = p$, $Cp' = p'$; ces droites r, p, p', sont les projections de la vitesse virtuelle CD, ou les vitesses virtuelles des forces R, P et P' estimées suivant leurs directions.

Les triangles rectangles CrD, CpD et $Cp'D$ donneront $\cos a = \frac{r}{CD}$, $\cos \alpha = \frac{p}{CD}$, $\cos \alpha' = \frac{p'}{CD}$; en substituant ces quantités dans l'équation précédente, et supprimant le dénominateur commun CD, il viendra

$$Rr = Pp + P'p'. \qquad (2)$$

On a désigné par le nom de *moment* le produit d'une force par sa vitesse virtuelle; ainsi l'équation que nous venons de trouver exprime que, si plusieurs forces appliquées à un même point sont en équilibre, le moment de la résultante de ces forces sera égal à la somme des moments de leurs composantes.

Les produits que nous venons d'appeler moments sont des *moments virtuels*, qu'il ne faut pas confondre avec les quantités que nous avons désignées par le même nom (**30**), dans la composition des forces.

Le moment d'une force est toujours le produit de cette force par le nombre d'unités linéaires contenues dans une

ligne droite; mais dans les moments ordinaires, cette droite est perpendiculaire à la direction de la force, et dans les moments virtuels, le facteur linéaire par lequel on multiplie chaque force est pris sur sa direction, ou sur son prolongement.

Pour obtenir l'équation (2), nous avons seulement transformé les quantités qui multiplient les forces R, P et P′, dans l'équation (1); si l'équation (2) était donnée, il serait facile d'effectuer les transformations par lesquelles on retrouverait l'équation (1). En effet, le triangle rectangle CrD donne la proportion

$$1 : \cos a :: \text{CD} : \text{C}r \quad \text{ou} \quad r = \text{CD} . \cos a;$$

et les triangles rectangles CpD, Cp'D, donneront

$$p = \text{CD} . \cos \alpha, \quad p' = \text{CD} . \cos \alpha'.$$

Ces valeurs de r, p et p', étant substituées dans l'équation (2), en négligeant le facteur commun CD, cette équation devient

$$\text{R} \cos a = \text{P} \cos \alpha + \text{P}' \cos \alpha' :$$

c'est l'équation (1) que nous avions formée directement, d'après le principe de la composition des forces.

On formerait de la même manière les équations (1) et (2), pour un nombre quelconque de forces, qui tiendraient un point ou un corps en équilibre.

Nous allons montrer par quelques exemples, que si l'on employait le principe des vitesses virtuelles dans la recherche des conditions d'équilibre des machines simples, on trouverait les mêmes résultats que ceux que nous avons obtenus par le principe de la composition des forces.

Premier exemple. Soit un levier ACB (*fig.* 112) posé sur son appui C; soit P une puissance appliquée à l'extrémité A du bras de levier CA, suivant la direction AP: cette puissance tient en équilibre un fardeau Q, suspendu à l'extrémité de l'autre bras CB du levier; il s'agit de déterminer le rapport de la puissance P au poids du fardeau Q.

Augmentons la puissance P d'une petite quantité, l'équilibre sera rompu; au bout du premier instant du mouvement, le levier aura la position $m\text{C}n$, et nous pourrons lui appliquer l'équation des vitesses virtuelles

$$\text{R}r = \text{P}p + \text{P}'p'.$$

Observons d'abord que la résultante R est détruite par la résistance du point d'appui C; remplaçons $\text{P}'p'$ par $\text{Q}q$: ce terme est négatif, parce que la projection q de la vitesse virtuelle tombe sur le prolongement de la direction du fardeau Q; ainsi l'équation d'équilibre deviendra

$$\text{P}p = \text{Q}q.$$

Cette équation fait voir que dans l'équilibre du levier, les moments virtuels de la puissance P et du fardeau Q sont égaux : elle doit être d'accord avec celle que nous avons trouvée par le principe de la composition des forces; nous allons en faire la vérification.

Menons mp perpendiculaire à AP, et nq perpendiculaire à BQ, nous aurons $p = \text{A}p$, $q = \text{B}q$.

Les triangles rectangles Apm, AMC, ont leurs côtés perpendiculaires; en effet, Ap et pm sont respectivement perpendiculaires à CM et AM, et à la place du petit arc Am, qui forme l'hypoténuse, ou le troisième côté du premier

triangle, on peut prendre la tangente de cet arc, qui est perpendiculaire à l'hypoténuse CA du second triangle; donc ces deux triangles sont semblables, et leurs côtés homologues donnent la proportion

$$CA : CM :: Am : Ap = \frac{CM \times Am}{CA}.$$

On prouvera de la même manière que les deux triangles rectangles Bqn, BNC, sont semblables, et leurs côtés homologues donneront

$$CB : CN :: Bn : Bq = \frac{CN \times Bn}{CB}.$$

Ces valeurs étant substituées à la place de p et q, l'équation des moments virtuels devient

$$\frac{P \times CM \times Am}{CA} = \frac{Q \times CN \times Bn}{CB}.$$

D'après le mouvement qui a changé la position du levier, ses bras CA et CB ont décrit deux angles égaux; les petits arcs interceptés Am, Bn, sont entre eux comme leurs rayons, ce qui donne

$$CA \times Bn = CB \times Am;$$

multipliant cette équation par celle qui précède, et supprimant les facteurs communs, on aura

$$P \times CM = Q \times CN.$$

C'est l'équation des moments ordinaires, déduite, par de simples transformations, de l'équation des vitesses virtuelles; d'où il résulte que chacune de ces équations exprime les conditions de l'équilibre du levier.

Au lieu de deux forces seulement, dont l'une se nomme la puissance et l'autre la résistance, si le levier était sollicité par un plus grand nombre de forces, l'équation des vitesses virtuelles serait composée d'un nombre de termes égal à celui des forces; la somme de tous ces termes serait égale à zéro, et par des transformations semblables à celles que nous venons de faire, on retrouverait les conditions d'équilibre du levier, déduites du principe de la composition des forces. D'ailleurs on peut toujours réduire à deux forces le nombre de toutes celles qui sont appliquées à un levier, dont l'une sera la résultante des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, et l'autre la résultante de celles qui tendent à le faire tourner dans le sens contraire.

Deuxième exemple. Les conditions d'équilibre du treuil (*fig.* 66), qui ont été démontrées (**118**), se déduisent facilement du principe des vitesses virtuelles.

La roue du treuil et son cylindre ayant le même axe et tournant ensemble, si par l'action de la puissance P, la roue fait une révolution, la longueur de sa circonférence sera l'espace parcouru par la puissance, et pendant le même temps la résistance, ou le poids Q, s'élèvera verticalement à une hauteur qui aura pour mesure la longueur de la circonférence du cylindre; ces circonférences sont les espaces parcourus dans le premier instant, et leur rapport inverse est comme celui de la puissance à la résistance, d'après le principe des vitesses virtuelles; ainsi l'on a

$$P : Q :: 2\pi \times CN : 2\pi \times CM :: CN : CM :$$

c'est la proportion que nous avons trouvée par la méthode ordinaire.

Troisième exemple. Le cric (*fig.* 72) peut être considéré comme un levier réuni à un treuil.

Désignons par R la longueur de la manivelle, ou du bras de levier à l'extrémité duquel agit la puissance P, et par r le rayon du pignon dont les dents engrènent dans celles de la roue M du treuil; en représentant la résistance de cette roue par Q', et considérant la circonférence que la puissance fait décrire à la manivelle, et celle que décrit en même temps le rayon du pignon, on a

$$P : Q' :: 2\pi r : 2\pi R :: r : R.$$

Soient R' le rayon de la roue M, que nous considérons comme la roue d'un treuil, et r' le rayon du pignon N', dont les dents engrènent dans celles de la crémaillère du cric, ou le rayon du cylindre du treuil; on aura, suivant le dernier exemple,

$$Q' : Q :: 2\pi r' : 2\pi R' :: r' : R';$$

ces deux proportions étant multipliées terme à terme, il vient

$$P : Q :: rr' : RR',$$

résultat identique avec celui de l'article **140**.

Quatrième exemple. Soit ACA' (*fig.* 113) la section verticale de deux plans inclinés adossés, qui ont pour hauteur commune la verticale BC, et dont les bases AB, BA', sont sur une droite horizontale AA'; deux corps M et M', posés sur ces plans inclinés, sont liés l'un à l'autre par une corde parfaitement flexible et inextensible, qui passe sur la poulie fixe E.

Les deux corps M et M' sont sollicités seulement par leurs

poids P et Q, qui se font équilibre; nous pouvons supposer que les poids de ces corps sont réunis à leurs centres de gravité g, g', et qu'ils agissent suivant les verticales gP, g'Q.

Si l'équilibre est rompu, de sorte que, dans le premier instant du mouvement, le corps M descende sur le plan incliné CA, et vienne prendre la position N, son centre de gravité g aura parcouru la distance gh; pendant le même instant le corps M′ sera monté en N′ sur le plan incliné CA′, et son centre de gravité g' aura parcouru la distance $g'h'$ égale à gh.

Il est facile, d'après ces dispositions, d'appliquer la formule $Pp = Qq$, pour trouver les conditions d'équilibre.

Les lignes droites gh, $g'h'$, sont les vitesses virtuelles des corps M et M′; ces vitesses sont égales et de signe contraire. Par les points h et h', menons les droites hi, $h'i'$, respectivement perpendiculaires aux verticales gP et g'Q; les distances gi, $g'i'$, ou les projections des vitesses virtuelles sur les directions des forces P et Q, seront les valeurs de p et q. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, il viendra

$$P \times gi = Q \times g'i'.$$

C'est-à-dire que les poids P et Q sont réciproquement comme les distances verticales qu'ils parcourent dans le premier instant du mouvement.

Pour vérifier cette règle, nous allons chercher comment on peut en déduire celle qui est fondée sur les principes ordinaires de la Statique.

Les deux triangles rectangles ABC, hig, qui ont leurs côtés parallèles, sont semblables, ce qui donne

$$AC : CB :: gh : gi = \frac{CB \times gh}{AC};$$

on a aussi, par les triangles semblables A′BC, $h'i'g'$,

$$A'C : CB :: g'h' : g'i' = \frac{CB \times g'h'}{A'C}.$$

Ces valeurs de gi et $g'i'$ étant substituées dans l'équation précédente, après avoir fait les réductions, en observant que $gh = g'h'$, on aura

$$P \times A'C = Q \times AC.$$

D'après ce résultat, les poids P et Q, des corps M et M′, sont proportionnels aux longueurs des plans inclinés qui les soutiennent; c'est la condition que nous avons déjà trouvée (**169**) pour l'équilibre sur deux plans inclinés adossés; ce qui prouve que dans cette machine, le principe des vitesses virtuelles est d'accord avec celui de la composition des forces.

Cinquième exemple. Pour appliquer le principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions d'équilibre de la vis, nous prendrons celle de la *fig.* 106ᵉ, qui représente un fragment de la *fig.* 106; cette vis AB a son écrou E encastré dans l'une des poutres de sapin M du châssis qui sert à élever le fardeau Q; la puissance P est appliquée au levier H, adapté à la tête de la vis dont l'extrémité inférieure, ou le pivot, tourne dans la crapaudine C, ajustée dans la poutre N fixée au-dessous du châssis.

La direction de la puissance P est horizontale et perpendiculaire au levier H; on peut remplacer ce levier par une roue horizontale qui aura la longueur du levier, depuis l'axe de la vis jusqu'au point d'application de la puissance pour rayon, et dont la circonférence sera enveloppée par une corde qui sera tirée tangentiellement par la puissance; on ne chan-

gera rien aux effets du système en faisant passer cette corde sur une poulie verticale fixe, et attachant à son extrémité libre un poids équivalent à la puissance.

D'après ces dispositions, la puissance ou le poids P et la résistance Q agissent verticalement en sens contraire; si l'équilibre a lieu, et que par un accroissement de la puissance, ou par une diminution du fardeau, cet équilibre soit rompu, la descente du poids fera monter le fardeau, et les espaces parcourus dans le premier instant seront les vitesses virtuelles.

Désignons par h la hauteur du pas de la vis, et par r la longueur du levier, ou le rayon de la roue horizontale, la longueur de sa circonférence sera $2\pi r$; en faisant $p = 2\pi r$, $p' = h$, la formule des vitesses virtuelles devient

$$2\pi r P = hQ, \quad \frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi r};$$

cette formule est identique avec la proportion que nous avons trouvée (**173**) par la méthode ordinaire; elle fait voir que l'avantage de la puissance sera d'autant plus grand que la hauteur du pas de la vis sera plus petit, les autres quantités restant les mêmes.

La hauteur du pas de la vis $h = 0^m,009$, la longueur du levier, ou le rayon de la roue horizontale $r = 0^m,704$, et la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon $\pi = 3,1416$; ces valeurs étant substituées à la place des lettres dans la dernière formule, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{0,009}{2 \times 3,1416 \times 0,704} = \frac{9}{4423}.$$

Un poids, ou une puissance égale à 9 kilogrammes, appli-

quée au levier de cette vis, ferait équilibre à un fardeau de 4423 kilogrammes, si le frottement était nul.

Sixième exemple. Considérons encore deux moufles M et N (*fig.* 114), dont la première est retenue dans une position fixe, par un boulon qui passe dans la boucle H de sa chape, et la seconde porte un crochet auquel on suspend le fardeau Q que l'on veut élever; ces deux moufles sont assemblées par une corde attachée au point fixe K par l'un de ses bouts; cette corde passe successivement dans les gorges des poulies de la moufle mobile et de la moufle fixe, et son bout libre est tiré par une puissance que l'on peut remplacer par un poids P qui lui soit équivalent.

Il est facile de prouver que les conditions d'équilibre de cette machine sont renfermées dans l'équation des vitesses virtuelles

$$Pp = Qq.$$

En effet, si dans le premier instant du mouvement, le poids Q est élevé à une hauteur verticale h, chacun des quatre cordons qui aboutissent aux deux poulies de la moufle mobile se raccourcit de la même quantité h; la descente du poids P sera par conséquent de $4h$; ainsi l'on aura $p = 4h$ et $q = h$. En substituant ces quantités dans l'équation des vitesses virtuelles, il viendra

$$4hP = hQ, \quad P = \frac{Q}{4}.$$

Ce résultat est le même que celui que nous avons trouvé en cherchant les conditions d'équilibre des divers systèmes de poulies par le principe de la composition des forces.

Les exemples que nous venons de donner suffisent pour faire voir que l'on peut trouver, par le principe des vitesses

virtuelles, les conditions d'équilibre de toutes les machines simples; ce principe n'a pas lieu seulement dans les machines simples: il peut être appliqué à toutes les machines composées, pour trouver le rapport qui existe entre la puissance et la résistance, dans le cas d'équilibre. Pour trouver ce rapport, on donnera à la puissance une impulsion qui lui fasse parcourir un petit espace, ce mouvement sera transmis à la résistance qui parcourra, dans le même instant, un espace déterminé; les espaces parcourus par les points d'application de la puissance et de la résistance étant projetés sur leurs directions, le rapport inverse de ces deux projections sera égal au rapport théorique de la puissance à la résistance.

Il résulte de ce qui précède que, pour la résolution des problèmes de la Statique, le principe des vitesses virtuelles peut être employé préférablement à celui de la composition des forces, parce qu'il donne les mêmes solutions d'une manière plus simple, et qu'étant moins compliqué il se grave plus facilement dans la mémoire.

Depuis longtemps le principe des vitesses virtuelles a été reconnu dans le levier et dans quelques-unes des autres machines simples; Galilée le regardait comme une propriété générale de l'équilibre des machines. Descartes a réduit toute la Statique à un seul principe qui revient à celui des vitesses virtuelles. Ce principe a été étendu à un système quelconque de corps en équilibre par Jean Bernoulli; mais c'est Lagrange qui en a fait connaître toute la fécondité en le prenant pour base de sa Mécanique analytique, et, d'après cet illustre géomètre, il a été inséré dans tous les traités de Mécanique rationnelle.

Quelques autres principes d'équilibre ont été proposés,

Lagrange a fait voir que l'on parvient, par l'application de l'analyse infinitésimale, à les ramener à celui des vitesses virtuelles, dont ils ne sont que des modifications présentées sous d'autres formes, et d'après son opinion il en sera de même pour tous ceux que l'on pourra découvrir. Voici un théorème remarquable que l'on déduit de l'analyse appliquée à ce principe.

Lorsque l'équilibre a lieu dans un système de corps pesants, ou dans un seul corps, le centre de gravité du système, ou du corps, est le plus bas ou le plus haut possible.

Il y a deux états d'équilibre pour un système de corps pesants : l'un de ces états est celui d'*équilibre stable,* et l'autre l'équilibre non stable, ou *instantané.* Si le centre de gravité du système est le plus bas possible, son équilibre sera stable, et il sera instantané si son centre de gravité est le plus haut possible.

Dans la chaînette (76) l'équilibre est stable, parce que l'une des propriétés de cette courbe est d'avoir son centre de gravité le plus bas possible; en la renversant, elle présentera un état d'équilibre instantané. Nous verrons plus loin de plus amples détails et d'autres applications de ces deux états d'équilibre.

FIN DU LIVRE PREMIER ET DE LA STATIQUE.

LIVRE DEUXIÈME.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

183. La Dynamique a pour objet les lois du mouvement produit par des forces agissant sur des corps, ou sur des systèmes de corps que l'on nomme des machines, lorsque leur assemblage est disposé de manière qu'il donne le moyen de produire, soit des efforts assez puissants pour vaincre de grandes résistances avec de médiocres efforts; soit des mouvements rapides, qui exécutent avec célérité et précision des travaux déterminés.

Nous ne connaissons les forces que par les effets qu'elles produisent, et ces effets nous suffisent, parce que leur cause, qui nous est inconnue, n'entre pas dans les données qui doivent servir à démontrer les théorèmes et à résoudre les problèmes de la Mécanique.

La Statique ne renferme que des questions dans lesquelles les forces se détruisent, ce qui produit l'équilibre des corps auxquels ces forces sont appliquées; on concevra facilement

qu'il serait possible de faire dépendre la Statique de la Dynamique, parce que c'est de la cessation du mouvement que résulte l'équilibre.

On verra plus loin que les géomètres sont parvenus à ramener les questions sur le mouvement à de simples questions d'équilibre, et que la Dynamique renferme le cas d'équilibre produit par des corps en mouvement, qui ne se trouve pas dans la Statique; ainsi la Mécanique, que l'on divise en Statique et Dynamique, pourrait être comprise dans un seul traité, et c'est la méthode qui a été généralement suivie jusqu'à la fin du dernier siècle, par les auteurs qui ont publié des ouvrages élémentaires sur cette science.

Un corps est en mouvement lorsqu'il est transporté d'un lieu dans un autre. En commençant l'étude de la Mécanique par les lois du mouvement, on s'appuie sur un fait qui est devenu familier à l'observateur le moins attentif, et par le moyen de cette méthode, la clarté des premiers principes ne laisse rien d'obscur sur les conséquences qu'on en déduit.

Lorsqu'on commence par la Statique, il faut admettre la notion de force, qu'on ne peut pas éclaircir d'une manière satisfaisaute; mais cette notion étant accordée, toutes les propositions de la Statique forment un enchaînement facile à suivre.

Les problèmes de la Statique sont beaucoup plus faciles à résoudre que ceux de la Dynamique, et dans un grand nombre de cas, qui se présentent fréquemment, on a besoin de faire usage des questions que l'on traite dans la Statique; on ne doit pas se borner à les étudier pour les comprendre, il est nécessaire de les repasser jusqu'à ce que l'on soit parvenu à se les approprier comme des conuaissances usuelles:

c'est par ces motifs que la Statique a été séparée de la Dynamique, et qu'on en a formé la première partie de la Mécanique.

184. Dans les questions de Dynamique, il est nécessaire de déterminer le temps, ou la durée des mouvements que l'on observe; cette quantité peut être mesurée de plusieurs manières, sur lesquelles nous allons d'abord donner quelques détails.

Nous ferons connaître plus tard comment la mesure du temps peut être déterminée par les oscillations du pendule; le moyen généralement adopté pour mesurer le temps consiste dans les horloges, tant celles qui sont employées aux usages civils, où l'on n'a pas besoin d'une grande précision, que celles qui sont construites par d'habiles horlogers pour les observateurs qui cultivent les sciences; ils sont parvenus, dans la construction de ces horloges, à obtenir une régularité qui satisfait à toute l'exactitude qui peut être exigée pour constater la durée des phénomènes que l'on observe.

On appelle jour solaire, le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil par le même méridien. Ces jours sont inégaux: si une horloge bien réglée marque midi lorsque le soleil passe au méridien à une époque déterminée, par exemple, le 15 avril, le lendemain elle marquera midi avant le passage du soleil, c'est-à-dire que le midi de l'horloge sera en avance sur celui du soleil, et il en sera de même les jours suivants, jusqu'au 15 juin; après cette époque le soleil passera au méridien avant le midi marqué par l'horloge. La différence entre l'instant où le soleil passe au méridien et le midi marqué par une horloge dont le mouvement est supposé d'une uniformité constante, s'appelle *équation du temps;* elle est marquée pour chaque jour de

l'année, dans la *Connaissance des Temps,* l'*Annuaire* rédigé par le Bureau des Longitudes et divers autres éphémérides ou almanachs.

Pour remédier à l'inconvénient de l'inégalité du temps marqué par les jours solaires, qu'on appelle *temps vrai,* on a adopté le *temps moyen,* dont les jours sont égaux, et qui tiennent un certain milieu entre les plus grands et les plus petits jours solaires; la différence, marquée par l'équation du temps, n'excède pas $\frac{1}{88}$ de jour.

Le jour est divisé en 24 heures, une heure renferme 60 minutes et la minute 60 secondes; ainsi le jour contient $24 \times 60 \times 60 = 86400$ secondes. Pour mesurer les parties de temps plus petites que la seconde, on les réduit en fractions décimales de seconde; par exemple, pour exprimer une durée de 7 heures 24 minutes 15 secondes $\frac{3}{4}$ ou $\frac{75}{100}$ de seconde, on écrira $7^h 24' 15'',75$; les minutes sont marquées par un accent, les secondes par deux accents, et les parties moindres que la seconde forment une fraction décimale.

En prenant le jour solaire pour l'une des unités de temps, nous avons considéré le mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, ce qui donne le même résultat que le mouvement réel de la Terre autour du Soleil; les inégalités de cette unité de temps sont corrigées par la supposition d'un soleil fictif dont le mouvement est régulier, et qui est alternativement en avance ou en retard sur le soleil réel. Ces deux soleils commencent leur révolution annuelle au même instant, et lorsque cette révolution est achevée, ils se retrouvent ensemble au point de départ, pour commencer la révolution de l'année suivante.

On a encore une autre mesure du temps employée dans

l'Astronomie : c'est celui que la Terre met à faire une révolution autour de son axe, ou bien l'intervalle entre deux passages consécutifs de la même étoile au méridien, ce qui forme un jour *sidéral*. La régularité du mouvement de la Terre autour de son axe est constatée par les observations astronomiques: elles ont fait connaître que le jour moyen de 24 heures, ou l'intervalle de deux passages consécutifs du soleil moyen au méridien, est de $24^h 3' 56'',5554$ de temps sidéral.

Pour réduire 24 heures de temps sidéral en heures de temps moyen, on aura la proportion suivante:

$$24^h 3' 56'',5554 : 24^h :: 24^h : x,$$

d'où l'on tire, après avoir réduit le premier terme en une seule fraction :

$$x = \frac{24 \times 24 \times 3600,0000}{86636,5554},$$

2 log 24............	2.7604224
log 36000000.......	7.5563025
c. log 866365554......	1.0622988
log x.............	11.3790237

$$x = 23^h,93446 = 23^h 56' 4'',06,$$

c'est-à-dire que la longueur du jour sidéral est de $23^h 56' 4'',06 = 86164'',06$ de temps moyen.

En supposant qu'une étoile et le Soleil moyen soient passés au même instant dans le plan du méridien, lorsque l'étoile sera revenue dans ce plan, le Soleil moyen en sera éloigné de $3' 55'',94$.

D'après les grands travaux qui ont été exécutés en France

pour établir le nouveau système des poids et mesures, la mesure du temps devait être assujettie à la progression décimale, comme toutes les autres mesures de ce système; le jour était divisé en 10 heures, on divisait l'heure en 100 minutes et la minute en 100 secondes; ainsi le jour était composé de 100 000 secondes décimales.

Pour chercher la valeur d'une seconde décimale en secondes de l'ancienne division, que l'on nomme division sexagésimale, on calculera le quatrième terme de la proportion suivante :

$$100\,000 : 1 :: 86\,400 : x = 0{,}864.$$

Cette division décimale du temps a été adoptée par Laplace, dans la *Mécanique céleste* et dans l'*Exposition du Système du Monde*, dont la lecture doit être recommandée à toutes les personnes qui cultivent les sciences.

Le jour sidéral, le jour solaire de temps vrai et le jour de temps moyen, avec leurs divisions et sous-divisions en heures, minutes et secondes, sont des mesnres du temps adoptées par toutes les nations civilisées; les astronomes règlent leurs pendules sur le temps sidéral; les cadrans solaires marquent le temps vrai, et c'est sur le temps moyen que doivent être réglées les horloges et les montres ou chronomètres qui servent aux expériences des sciences physiques et de la mécanique.

Ces deux dernières mesures du temps sont employées pour les usages de la vie civile; depuis une époque qui remonte à l'origine des horloges, on avait adopté l'usage de régler les horloges publiques sur le mouvement du soleil, ce qui exigeait un mécanisme particulier, ou bien l'horloge devait être avancée ou retardée chaque jour pour la mettre à l'heure du

temps vrai. Cet ancien usage a été changé dansplusieurs pays étrangers; depuis longtemps, toutes les horloges publiques d'Angleterre sont réglées sur le temps moyen. En France, où tant de vieilles coutumes ont été réformées depuis la révolution, Lalande a inutilement proposé de substituer le temps moyen au temps vrai, pour régler les horloges publiques; Delambre s'opposait à cette réforme. (*Voyez* son *Astronomie théorique et pratique,* tome II, page 258.) Cependant, d'après les persévérantes représentations de MM. Breguet, le préfet du département de la Seine a pris un arrêté suivant lequel toutes les horloges publiques qui dépendent de la ville devaient être réglées sur le temps moyen, à dater du 22 décembre 1826, et cette réforme a été adoptée, sans aucune réclamation, pour toutes les horloges publiques de Paris. Le Gouvernement n'a rien fait pour propager ce changement dans toute la France, et l'exemple donné par MM. Bregnet n'a pas encore été suivi par les horlogers des départements.

Le *Moniteur* du 9 décembre 1826 renferme un article dans lequel on annonce qu'avant de prendre cette décision, l'administration avait consulté le Bureau des Longitudes; d'après le rapport de la commission, dont M. Arago était rapporteur, les horloges qui dépendent de la ville devaient être réglées sur le temps moyen à dater du 24 décembre, époque à laquelle le midi moyen est en retard seulement de 4 secondes sur le midi vrai.

185. La nature des forces nous étant inconnue, nous devons nous borner à observer leurs effets, les comparer et les soumettre au calcul pour en tirer les règles qui se déduisent des propositions de la Dynamique.

Dans les questions de la Statique, on cherche seulement les conditions auxquelles les forces doivent être assujetties

pour que l'équilibre puisse exister; il n'y a pas lieu de considérer différentes espèces de forces, et on peut prendre l'unité de poids pour mesure de l'unité de force; alors la mesure d'une force quelconque est exprimée par le nombre d'unités de poids que cette force est capable de tenir en équilibre. D'après cette manière d'évaluer les forces, on peut dire qu'elles sont entre elles comme les effets qu'elles peuvent produire; cette proportionnalité est une loi générale de la Mécanique.

Les forces dont les effets sont l'objet de la Dynamique, sont celles qui produisent ou qui modifient le mouvement des corps auxquels elles sont appliquées; la loi que nous venons d'indiquer leur est applicable, comme nous le verrons plus loin. Ces forces sont de deux sortes, on les distingue par la manière dont elles agissent; une force peut agir sur un corps, et l'abandonner immédiatement après lui avoir donné un choc dont la durée est infiniment petite : c'est ce mode d'action qui caractérise les forces de la première sorte. Quant aux forces de la seconde sorte, dont l'action n'est pas instantanée, elles agissent par des impulsions successives, mais elles se succèdent avec une si grande rapidité que leurs intervalles échappent à tous les moyens d'observation que nous pouvons employer pour les distinguer.

Lorsqu'un corps est sollicité par une ou plusieurs forces, et que, cédant à l'impulsion qu'il en reçoit, il quitte la place où il se trouvait pour aller en occuper une autre, on dit que ce corps est en *mouvement;* ainsi le mouvement consiste dans le transport d'un corps d'un lieu dans un autre.

186. Un corps ne possède aucune aptitude pour changer l'état dans lequel il se trouve; s'il est en repos il y restera jusqu'à ce que, par l'action d'une ou de plusieurs forces, il soit

mis en mouvement, et alors le mouvement continuera dans la même direction, s'il n'est pas détourné ou détruit par des causes étrangères.

On conçoit facilement l'état de repos dans lequel doit rester un corps qui n'est sollicité par aucune force capable de le mettre en mouvement, ou lorsque les forces qui lui sont appliquées se font équilibre; mais lorsqu'un corps a été mis en mouvement par une force qui cesse d'agir, soit après un choc instantané, soit après avoir produit le mouvement par une suite croissante d'impulsions, on a quelque difficulté à concevoir que ce mouvement doive se perpétuer, car il ne tarde guère à se ralentir, et il est bientôt entièrement détruit.

Les causes du ralentissement et de la destruction du mouvement des corps, sur la surface de la terre et dans les machines, consistent dans le frottement des surfaces qui glissent l'une sur l'autre, et dans la résistance de l'air, dont les molécules s'opposent au mouvement des corps qui le traversent. Pour prolonger la durée du mouvement, il suffit de diminuer ces obstacles; et s'il était possible de les supprimer entièrement, le mouvement communiqué à un mobile, ou à une machine, se perpétuerait sans éprouver aucune altération : comme la destruction de ces obstacles nous est impossible, le mouvement ne peut se continuer au-delà d'un certain temps, ordinairement très court, à moins qu'il ne soit entretenu par le renouvellement de l'action des forces qui le produisent.

Donc le ralentissement que nous observons dans le mouvement qui a été communiqué à un corps est indépendant de ce corps, qui ne peut par lui-même produire aucun changement dans le mouvement qu'il a reçu, ni dans la direction de ce mouvement.

C'est dans cette propriété des corps, par laquelle ils tendent à se maintenir, soit dans l'état de repos, soit dans celui de mouvement où ils se trouvent, que consiste leur *force d'inertie,* qui est nommée seulement *inertie* par plusieurs auteurs qui ne la considèrent pas comme une force. On peut employer l'une ou l'autre de ces dénominations; nous donnerons cependant la préférence à la première, parce qu'il est toujours nécessaire d'employer une force lorsqu'il s'agit de vaincre une résistance.

L'inertie est une propriété inhérente à la matière, qui ne doit pas être confondue avec la pesanteur, car l'effet de la pesanteur sur un corps peut être détruit, soit en le posant sur une table horizontale, soit en le suspendant à un point fixe par le moyen d'un fil, d'une corde ou d'une chaîne; mais dans l'une ou l'autre de ces positions, l'inertie du corps subsistera toujours, et son état de repos ou de mouvement ne pourra être changé que par la force qui lui sera transmise par un autre corps.

La force d'inertie d'un corps est proportionnelle à sa masse; ainsi, pour des corps qui renferment des quantités de matière différentes, il faudra employer des forces proportionnelles à leurs masses, pour les mettre en mouvement lorsqu'ils sont en repos, ou bien pour détruire leurs mouvements lorsqu'on veut les réduire à l'état de repos.

Cette proportionnalité peut facilement s'expliquer: un corps n'est autre chose qu'un assemblage de molécules, ou de particules matérielles qui forment sa masse. On peut supposer que le mouvement est produit par autant de forces partielles, égales entre elles et parallèles, qu'il y a de molécules dans la masse du corps; il est évident que pour communiquer le même mouvement à un autre corps dont la

masse est double ou triple,..., il faudra lui appliquer une force deux fois, trois fois,... plus grande que celle qu'on a fait agir sur le premier corps.

Dans les propositions que nous allons démontrer sur le mouvement, nous ferons d'abord abstraction des volumes et des autres propriétés physiques des corps, ou des mobiles, nous les considérerons seulement comme des particules, ou comme de simples points matériels, qu'il ne faut cependant pas confondre avec des points mathématiques, quoique leurs dimensions en longueur, largeur et épaisseur soient très petites. Les lois du mouvement étant établies d'après cette hypothèse, il sera facile de les appliquer en considérant les corps réels soumis à l'action des forces.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT UNIFORME.

187. Le mouvement le plus simple, et auquel on rapporte tous les autres mouvements, est celui d'un mobile qui parcourt des espaces égaux dans des temps égaux ; on le nomme *mouvement uniforme*.

Aucun des mouvements que nous observons sur la surface de la terre n'est parfaitement uniforme, il y a toujours des obstacles qui troublent la régularité des mouvements imprimés aux mobiles; c'est en faisant abstraction de ces irrégularités lorsqu'elles sont peu sensibles, ou qu'elles se compensent à peu près, que nous nous formons l'idée du mouvement uniforme, et que nous appliquons le calcul pour résoudre les diverses questions qui en dépendent.

Considérons le mobile, ou le point matériel M (*fig.* 115), qui a reçu d'une force quelconque un mouvement uniforme, avec lequel il décrit la ligne droite AB, indéfiniment prolongée au-delà du point B; prenons sur cette droite le point A pour l'origine des espaces parcourus par le mobile M, et soit la distance $AM = e$ de ce mobile à l'origine, lorsqu'on commence à compter le temps, que nous désignerons par t, ou lorsque $t = 0$; représentons par v l'espace que parcourt le mobile pendant chaque unité de temps; au bout d'un nombre quelconque t d'unités de temps il aura parcouru l'espace vt, et si l'on désigne par x la distance à laquelle il se trouve de

l'origine A, on aura, pour l'équation générale du mouvement uniforme,

$$x = e + vt.$$

Cette équation renferme les deux constantes e et v; on peut donner à la quantité e différentes valeurs, parce que le mobile peut être plus ou moins éloigné du point fixe A lorsque $t = 0$, ou lorsqu'on commence à compter le temps; mais la quantité v doit conserver la même valeur pendant toute la durée du mouvement : cette quantité, qu'on appelle la *vitesse* du mobile, caractérise son mouvement uniforme, et le distingne de tout autre monvement de la même espèce.

La ligne droite suivant laquelle se meut le mobile étant divisée en parties égales, en désignant par a l'une des parties de cette droite, ou l'unité linéaire, et prenant la minute pour l'unité de temps, on aura

$$x + a = e + v(t + 1') = e + vt + v \times 1';$$

retranchant l'équation précédente de celle-ci, il viendra

$$a = v \times 1' = v;$$

ce qui fait voir que l'unité linéaire est égale à la vitesse du mobile, ou bien que chaque unité linéaire est parcourue par le mobile dans l'unité de temps.

En résolvant la première équation par rapport à v, on a

$$v = \frac{x - e}{t};$$

le numérateur $x - e$ est l'expression de l'espace que le mobile a parcouru pendant le temps t, et sa vitesse, ou l'espace

parcouru pendant l'unité de temps, a pour valeur le quotient de l'espace parcouru pendant le temps t divisé par ce temps.

Lorsque le temps est compté à partir du point fixe A, la distance représentée par $e = 0$; alors l'équation ne renferme que v, x et t, et il suffit de connaître deux quelconques de ces quantités pour calculer la valeur de la troisième.

Soit M′ un autre mobile dont le mouvement est uniforme, et qui se meut aussi suivant la ligne droite AB, il aura pour équation

$$x' = e' + v't'.$$

Supposons que les deux mobiles soient partis au même instant, et que la vitesse v de celui qui est en arrière soit plus grande que la vitesse v' de celui qui est en avant, il y aura un point R où les deux mobiles se rencontreront; pour ce point de rencontre, on a $x = x'$ et $t = t'$; alors les équations des deux mobiles deviennent

$$x = e + vt, \quad x = e' = v't.$$

En égalant les seconds membres de ces deux équations, transposant et prenant la valeur de t, on aura

$$e + vt = e' + v't, \quad t = \frac{e' - e}{v - v'}.$$

La valeur de t est le quotient de deux lignes droites; ce quotient peut être considéré comme un nombre abstrait par lequel l'unité de temps est multipliée.

En prenant la minute pour l'unité de temps, la lettre t représentera un nombre de minutes, et la formule que nous

venons de trouver donnera la proportion suivante :

$$v - v' : e' - e :: 1' : t = 1' \times \frac{e' - e}{v - v'}.$$

On voit que la quantité qui représente la valeur de t est le produit de 1 minute multipliée par le quotient de la distance des points de départ des deux mobiles divisée par la différence de leurs vitesses.

Le même raisonnement pourra s'appliquer à tous les cas où il s'agira de déterminer de quelle espèce doit être un nombre représenté par une formule algébrique.

Si les vitesses des deux mobiles étaient égales, on aurait

$$t = \frac{e' - e}{0} = \infty ;$$

le temps serait représenté par l'expression d'une quantité infinie. En effet, le mobile qui est en arrière ne peut pas atteindre celui qui le précède, lorsque ces deux mobiles ont la même vitesse.

En substituant la valeur de t dans l'une des équations, par exemple dans l'équation $x = e + vt$ du premier mobile, il viendra

$$x = e + v \times \frac{e' - e}{v - v'} = \frac{e'v - ev'}{v - v'} = e' + \frac{(e' - e)v'}{v - v'} :$$

c'est la distance AR de l'origine A au point R où les deux mobiles se rencontrent.

On trouverait le même résultat, en substituant la valeur de t dans l'équation $x = e' + v't$ du second mobile.

Tous les cas du problème des courriers se résolvent par les équations dont nous venons de faire usage, pour le mouve-

ment rectiligne et uniforme de deux mobiles; on peut aussi se servir de ces équations pour chercher les points de rencontre des aiguilles dont les extrémités décrivent la circonférence du cadran d'une montre ou d'une pendule.

188. Prenons le point M de la circonférence du cadran (*fig.* 116), où la pendule marque midi, pour l'origine du mouvement de ses aiguilles; soient A et B les points de cette circonférence sur lesquels se trouvent les extrémités des aiguilles des heures et des minutes; les arcs $MBA = e$, $MB = e'$, seront les distances de ces aiguilles au point fixe M lorsque $t = 0$, ou lorsqu'on commence à compter le temps.

En désignant la vitesse de l'aiguille des heures par v, celle de l'aiguille des minutes par v', et par x la distance du point M au point de rencontre de ces aiguilles, on aura les deux équations

$$x = e + vt, \quad x = e' + v't,$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{e - e'}{v' - v},$$

pour l'expression du temps au bout duquel l'aiguille des minutes atteindra celle des heures.

Maintenant l'aiguille des heures est en avance sur celle des minutes de la circonférence entière du cadran. Désignons par p la longueur de cette circonférence, et par t' le temps au bout duquel aura lieu la deuxième rencontre des aiguilles, nous aurons

$$x = vt', \quad x = p + v't'.$$

En prenant la valeur de t', et faisant abstraction du signe qui serait négatif, parce que l'aiguille des minutes revient sur

l'espace qu'elle a déjà parcouru, on a

$$t' = \frac{p}{v' - v}.$$

On trouverait le même résultat pour l'expression du temps au bout duquel auront lieu la troisième, la quatrième,..., la $m^{ième}$ rencontre des deux aiguilles, d'où il résulte que les temps seront exprimés par les termes de la progression arithmétique suivante :

$$\frac{e-e'}{v'-v}, \quad \frac{e-e'+p}{v'-v}, \quad \frac{e-e'+2p}{v'-v}, \ldots, \quad \frac{e-e'+(m-1)p}{v'-v}.$$

Le dernier terme de cette progression étant substitué à la place de t, dans la première équation, il viendra

$$x = e + \frac{ve - ve' + (m-1)vp}{v'-v} = \frac{v'e - ve' + (m-1)vp}{v'-v}.$$

Cette formule exprime l'espace que les deux aiguilles ont parcouru lorsqu'elles sont arrivées à leur $m^{ième}$ point de rencontre.

En cherchant les points de la circonférence du cadran où l'aiguille des heures est rencontrée par l'aiguille des secondes, dont la vitesse est représentée par v'', et supposant que cette troisième aiguille part du point M, on aura d'abord, pour le premier point de rencontre :

$$x = e + vt, \quad x = v''t', \quad t = \frac{e}{v'' - v}.$$

Le second point de rencontre sera déterminé, comme celui de l'aiguille des heures avec celle des minutes, par les

équations

$$x = vt', \quad x = p + v''t', \quad t' = \frac{p}{v'' - v};$$

on aura pareillement

$$\frac{e}{v'' - v}, \quad \frac{e + p}{v'' - v}, \quad \frac{e + 2p}{v'' - v}, \ldots, \frac{e + (n-1)p}{v'' - v};$$

et en substituant le terme général de cette série à la place de t, dans l'équation de l'aiguille des heures, il viendra

$$x = e + \frac{ve + (n-1)vp}{v'' - v} = \frac{v''e + (n-1)vp}{v'' - v}.$$

Cette valeur de x, et celle que nous avons trouvée pour la $m^{ième}$ rencontre de l'aiguille des heures avec celle des minutes, donnent l'équation suivante, par laquelle on déterminera la rencontre des trois aiguilles :

$$\frac{v'e - ve' + (m-1)vp}{v' - v} = \frac{v''e + (n-1)vp}{v'' - v}.$$

Les quantités m et n sont deux inconnues ; ainsi cette équation est indéterminée.

Pour appliquer cette formule générale à un exemple, nous supposerons que lorsqu'on commence l'observation, la pendule marque $9^h\,20'$.

La minute étant prise pour unité, la circonférence du cadran $p = 60$, et l'on a, pour les valeurs des autres lettres qui représentent des quantités constantes,

$$e = 46\tfrac{2}{3}, \quad e' = 20, \quad v = \tfrac{1}{12}, \quad v' = 1, \quad v'' = 60.$$

Ces nombres étant substitués à la place des lettres, on aura

l'équation numérique

$$\frac{46\frac{2}{3} - \frac{60}{11} + (m-1) \cdot \frac{60}{11}}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{60 \times 46\frac{2}{3} + (n-1) \cdot \frac{60}{11}}{60 - \frac{1}{12}},$$

qui se réduit à

$$719m - 11n = 397.$$

En résolvant cette équation par la méthode des équations indéterminées du premier degré, on trouve $m = 3$, $n = 160$, pour les plus petites valeurs entières des inconnues; d'où il résulte que la première rencontre des trois aiguilles aura lieu à la troisième rencontre de l'aiguille des heures avec celle des minutes.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT VARIÉ.

Nous avons vu que le mouvement uniforme est exprimé par l'équation $x = e + vt$, d'où l'on tire $\frac{x-e}{t} = v$; c'est-à-dire que le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, ou le quotient de la première de ces quantités divisée par la seconde, est égal à la vitesse du mobile.

Cette relation n'a pas lieu lorsque la force agit constamment sur le mobile; son action continue modifie le mouvement, de sorte que le mobile ne parcourt pas des espaces égaux dans des temps égaux, et par conséquent la vitesse n'est pas constante: alors le mouvement se nomme mouvement *varié*. Si la vitesse augmente avec le temps, le mouvement est accéléré, et la force qui produit ce mouvement se nomme force *accélératrice;* on appelle force *retardatrice* celle dont l'effet ralentit le mouvement, ou qui produit un mouvement retardé.

Du mouvement uniformément varié.

189. Le mouvement uniformément varié est produit par une force qui agit constamment sur un corps, ou sur un mobile, que l'on peut considérer soit comme un simple point matériel, soit comme ayant un volume quelconque. Si la force qui agit sur le mobile est une force accélératrice,

le mouvement sera accéléré, il sera retardé si le mobile est soumis à l'action d'une force retardatrice.

Puisque le mouvement que nous considérons est uniformément varié, s'il est accéléré, il reçoit des accroissements de vitesse qui sont les mêmes dans des temps égaux; s'il est retardé, la vitesse diminue pareillement de quantités égales dans des temps égaux : c'est ce que l'on exprime en disant que le mouvement est uniformément accéléré, ou uniformément retardé.

Pour simplifier les raisonnements, nous ne nous occuperons d'abord que du mouvement uniformément accéléré; nous supposerons que le mobile part du repos, sans aucune vitesse initiale, et que le temps est o, ou qu'on commence à compter le temps à l'instant du départ. Lorsque nous aurons déterminé les règles, ou les lois du mouvement uniformément accéléré, il sera facile de trouver comment elles doivent être modifiées pour en déduire celles du mouvement uniformément retardé.

Nous avons un exemple bien remarquable du mouvement uniformément accéléré dans la chute des corps, près de la surface de la terre: si l'on élève à une certaine hauteur des corps dont les densités soient peu différentes, ou qui renferment des quantités de matière à peu près égales, sous des volumes égaux, et qu'on les abandonne à eux-mêmes, de sorte qu'ils ne soient retenus par aucun support, on les voit tomber verticalement de la même hauteur dans des temps égaux, quels que soient leurs volumes: ainsi en faisant tomber à la fois de la même hauteur un boulet de canon et une balle de fusil, les chutes auront lieu dans le même temps.

Si les corps qu'on laisse ainsi tomber dans l'air ont des densités très différentes, ils ne tomberont pas d'une même hauteur dans le même temps: une balle de fusil tombera plus

vite qu'une balle de liége de même volume; alors la différence des vitesses provient de la résistance de l'air, dont l'effet est d'autant plus sensible que les corps sont plus légers, ou qu'ils renferment une moindre quantité de matière sous un plus grand volume: mais dans un espace vide, par exemple dans un tube de verre, dont on a fait sortir l'air par le moyen de la machine pneumatique, on observe que les corps légers et les corps lourds, tels qu'un brin de duvet et un fragment de métal, tombent de la même hauteur dans le même temps.

Le phénomène de la chute des corps est produit par une force que l'on appelle *pesanteur*, ou *gravité;* tous les corps éprouvent l'action de cette force qui les attire, ou qui les pousse vers le centre de la terre, et qui leur communique un mouvement uniformément accéléré lorsque son intensité n'est pas détruite par des obstacles qui lui sont opposés.

Tous nos moyens d'investigation sur la pesanteur se bornent à observer les effets qu'elle produit sur les corps, pour chercher à déduire de ces effets les règles ou les lois du mouvement qu'elle leur communique; nous ignorons si la pesanteur agit par une pression continue, comme celle que produirait un ressort, ou bien si elle agit par des impulsions égales entre elles, successivement répétées à des intervalles de temps très petits et de même durée: nous adopterons cette dernière hypothèse, qui se confond avec la première lorsqu'on suppose les intervalles des impulsions infiniment petits.

Dans le mouvement produit par l'action de la pesanteur sur un corps, ou dans le mouvement uniformément accéléré, on considère: 1° le temps pendant lequel ce mouvement a lieu; 2° la vitesse acquise au bout de la première

seconde, que l'on prend pour unité de temps, ou d'un nombre quelconque de secondes, depuis le commencement de la chute; 3° l'espace parcouru par le mobile au bout d'un temps quelconque: nous allons chercher les relations qui existent entre ces trois quantités.

190. Considérons un corps, ou un mobile placé en A (*fig.* 117), et supposons que ce mobile soit abandonné à l'action de la pesanteur pendant un temps que nous représenterons par la ligne droite AB; imaginons que ce temps soit partagé en instants égaux, et prenons sur la droite AB les parties égales AE, EF, FG, etc., pour représenter ces instants.

La pesanteur, ou la gravité, étant supposée agir par une suite d'impulsions égales, successivement répétées au commencement de chaque instant, le mobile reçoit, à chaque impulsion, un degré de vitesse qui accélère son mouvement; puisque le mouvement est uniformément accéléré, tous ces degrés de vitesse sont égaux entre eux.

Soit AM le degré de vitesse que la première impulsion de la gravité communique au mobile; ce premier degré de vitesse sera invariable, et pendant la durée du premier instant le mouvement sera uniforme: au commencement du second instant, une deuxième impulsion de la gravité communique au mobile un degré de vitesse nN égal au premier. Ainsi, pendant la durée du second instant, la vitesse du mobile sera uniforme, et double de ce qu'elle était pendant le premier instant. On prouvera de la même manière, comme on le voit d'ailleurs représenté dans la figure, que pendant le troisième instant, la vitesse du mobile est triple de ce qu'elle était pendant le premier instant; que cette vitesse est quadruple pendant le quatrième instant, quintuple pendant le cinquième, et ainsi de suite: donc la gravité communique

au mobile des degrés de vitesse qui croissent comme le temps, ou comme la durée de sa chute.

La seconde étant prise pour l'unité de temps, si l'on désigne par g la vitesse acquise par un mobile au bout de la première seconde de sa chute, et par v la vitesse acquise par la chute de ce mobile au bout d'un nombre t de secondes, on aura la proportion suivante:

$$1'' : t'' :: g : v;$$

d'où l'on tire

$$v = gt.$$

Cette formule fera connaître l'une des trois quantités g, v, t, lorsque les deux autres seront données.

Si la vitesse v et le temps t étaient donnés, on aurait

$$g = \frac{v}{t};$$

c'est-à-dire que si un corps est abandonné à l'action de la pesanteur, elle lui communique, pendant la première seconde de sa chute, une vitesse égale au quotient de la vitesse acquise par ce corps, au bout d'un temps quelconque t, divisée par ce même temps.

La vitesse acquise par un corps au bout de la première seconde de sa chute, ou la quantité que nous avons désignée par g, se nomme *force accélératrice:* si la ligne droite AI représente l'unité de temps, ou la première seconde, la vitesse acquise au bout de cette unité de temps, ou la valeur de g, sera représentée par la droite Ir.

Cette force accélératrice due à la pesanteur, que nous avons représentée par g, est une quantité dont on a besoin pour la résolution d'un grand nombre de problèmes sur le mouve-

ment; sa valeur approximative, qui varie avec la latitude, a été déterminée par le moyen des expériences sur le pendule, comme nous le verrons plus loin; on a trouvé qu'à la latitude de Paris, et à des hauteurs peu élevées au-dessus de la surface de la terre, ou plus exactement du niveau de la mer, $g = 30^{p}\,2^{p}\,4^{l}\tfrac{1}{4} = 30^{p},19618$; ou bien, en nouvelles mesures métriques, $g = 9^{m},80892$.

Nous allons maintenant chercher la règle, ou la formule, pour calculer l'espace parcouru pendant un temps donné, par un corps abandonné à l'action de la pesanteur, qui lui communique un mouvement uniformément accéléré.

Dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru par un mobile, pendant un temps quelconque, est égal au produit de la vitesse par ce temps.

Le mouvement uniformément accéléré peut être considéré comme une suite de mouvements uniformes qui s'ajoutent successivement les uns aux autres, au commencement de chaque instant infiniment petit.

191. Soit un corps qui tombe du point A (*fig.* 117); désignons par AB le temps de la chute; partageons ce temps en petits instants AE, EF, FG, etc., égaux entre eux, et imaginons que le mouvement uniformément accéléré du mobile est produit par les impulsions qu'il reçoit successivement de la pesanteur, au commencement de chaque instant.

Représentons par AM le degré de vitesse produit par la première impulsion; cette vitesse sera uniforme, et l'espace parcouru par le mobile, pendant le premier instant, aura pour mesure le produit de la vitesse AM par le temps AE, ou le petit rectangle AMnE.

Au commencement du deuxième instant, l'action de la

pesanteur produit une nouvelle impulsion sur le mobile, et il en résulte un degré de vitesse égal à celui de la première impulsion; ainsi, pendant le deuxième instant, le mouvement du mobile sera encore uniforme, et sa vitesse sera double de ce qu'elle était pendant le premier instant : l'espace parcouru aura pour mesure le produit de la vitesse EN, double de AM, par le temps EF; cet espace sera représenté par le rectangle ENOF, ou FN.

En continuant le même raisonnement, on trouvera que la vitesse est uniforme pendant la durée de chaque instant, puisque, par hypothèse, la pesanteur agit sur le mobile par des impulsions égales et instantanées au commencement de chaque instant : l'espace parcouru au bout du temps AI est la somme des rectangles EM + FN + GO + etc., dont le nombre est égal à celui des instants contenus dans AI; cet espace, ou la somme de tous ces rectangles, forme la figure dentelée AI*r*QPONM.

A mesure que le nombre des instants contenus dans le temps représenté par AI augmente, la largeur des parties saillantes diminue, et la figure dentelée approche de celle du triangle AI*r*, avec laquelle elle se confond lorsque le nombre des instants est infini, ou lorsque la durée de chacun de ces instants n'est appréciable par aucun moyen d'observation, ce qui est le cas de la nature; d'où il résulte que si l'on représente le temps de la chute d'un corps par l'un des côtés AI de l'angle droit d'un triangle rectangle, et que l'autre côté I*r* représente la dernière vitesse acquise par ce corps, l'espace parcouru sera représenté par l'aire du triangle AI*r*, c'est-à-dire que cet espace est égal à la moitié du produit de la dernière vitesse acquise par le temps de la chute.

Désignons le temps de la chute du mobile par t, la vitesse

acquise au bout de ce temps par v, et par x l'espace parcouru; les relations énoncées dans la règle précédente donnent

$$x = \frac{1}{2} vt;$$

en mettant à la place de v sa valeur gt, on aura

$$x = \frac{1}{2} gt^2.$$

C'est-à-dire que si un corps tombe verticalement pendant un temps t, il parcourra un espace égal à la moitié du produit de la vitesse acquise au bout de la première unité de temps, ou de la première seconde, par le carré du temps de la chute.

Si le temps $t = 1''$, cette dernière formule devient

$$x = \frac{1}{2} g;$$

ce qui fait voir qu'au bout de la première seconde de la chute d'un corps, l'espace parcouru est égal à la moitié de la vitesse acquise: et par conséquent si, au bout de la première seconde, la pesanteur cessait d'agir, alors, le mobile continuant à se mouvoir avec la dernière vitesse, son mouvement serait uniforme, et pendant la deuxième seconde il parcourrait un espace double de celui que la pesanteur lui a fait parcourir pendant la première seconde de sa chute.

L'espace que la pesanteur a fait parcourir au mobile A pendant la première seconde, avec un mouvement uniformément accéléré, a pour mesure l'aire du triangle rectangle A I r, et la vitesse acquise est représentée par le côté I r; si le mobile A continue à se mouvoir, avec cette dernière vitesse seule-

ment, l'espace qu'il parcourra pendant une seconde aura pour mesure le produit de la vitesse Ir par le temps IS = IA, ou l'aire du rectangle ISVr, double du triangle AIr, parce que la base IA du triangle est égale à la base IS du rectangle, et qu'ils ont la hauteur commune Ir.

Si la pesanteur agit pendant le temps représenté par AB sur le mobile A, elle lui fera parcourir un espace dont la mesure sera égale à l'aire du triangle rectangle ABC, et la dernière vitesse acquise sera représentée par le côté BC. L'espace que cette vitesse ferait parcourir au mobile A, pendant un temps égal à AB, aurait pour mesure l'aire du rectangle ABCD, double du triangle ABC.

Donc si la pesanteur, ou la force accélératrice, cesse d'agir au bout d'un temps quelconque, la vitesse acquise par le mobile lui fera parcourir un espace double, dans un temps égal à celui pendant lequel a duré le mouvement uniformément accéléré.

Si à la place de t on met successivement les nombres 1, 2, 3, 4, etc., dans la formule $x = \frac{1}{2}gt^2$, cette formule deviendra

$$\begin{array}{ll} x' = \frac{1}{2}g \times 1, & \frac{x'}{1} = \frac{1}{2}g, \\ x'' = \frac{1}{2}g \times 4, & \frac{x''}{4} = \frac{1}{2}g, \\ x''' = \frac{1}{2}g \times 9, & \frac{x'''}{9} = \frac{1}{2}g, \\ x^{\text{iv}} = \frac{1}{2}g \times 16, & \frac{x^{\text{iv}}}{16} = \frac{1}{2}g, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Tous ces rapports sont égaux, puisqu'ils ont pour valeur commune $\frac{1}{2}g$; il en résulte que les espaces x', x'', x''', x^{iv}, etc.,

parcourus par un mobile qui tombe pendant 1, 2, 3, 4, etc. secondes, sont entre eux comme les carrés 1, 4, 9, 16, etc., de ces nombres de secondes, ou comme les carrés des temps.

Un corps qui tombe pendant une seconde, parcourt l'espace $\frac{1}{2}g = \frac{1}{2} \times 30^{p},19618 = 15^{p},09816$, ou $4^{m},90446$; pendant les deux premières secondes de sa chute, il parcourra un espace quatre fois plus grand, ou $4 \times 4^{m},9045 = 19^{m},6180$; au bout de trois secondes l'espace qu'il aura parcouru sera de $9 \times 4^{m},9045 = 44^{m},1405$, et ainsi de suite, en multipliant toujours l'espace parcouru pendant la première seconde par le carré du temps de la chute.

Puisque les espaces parcourus pendant les temps 1, 2, 3, 4, 5, etc., secondes, sont comme les carrés de ces temps 1, 4, 9, 16, 25, etc.; les espaces parcourus pendant chaque seconde seront comme les différences de ces carrés, ou comme la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc.

Dans la première seconde de sa chute, un corps parconrt $4^{m},90446$; il parcourra $3 \times 4^{m},90446 = 13,71338$ dans la deuxième seconde, $5 \times 4^{m},90446 = 24^{m},5223$ dans la troisième seconde, et ainsi de snite pour les secondes suivantes, en multipliant toujours l'espace parcouru pendant la première seconde par le terme correspondant de la suite des nombres impairs.

192. Les deux formules $v = gt$, et $x = \frac{1}{2}gt^2$, peuvent en fournir une troisième, dans laquelle le temps t ne sera pas compris, et qui renfermera une règle pour calculer la vitesse acquise, lorsqu'on connaît la hauteur de la chute.

En élevant la première formule au carré, et divisaut ensuite ses deux membres respectivement par ceux de la se-

conde formule, on aura

$$\frac{v^2}{x} = \frac{g^2 t^2}{\frac{1}{2} g t^2} = 2g;$$

si l'on fait disparaître le dénominateur x du premier membre, et que l'on multiplie le second membre par ce même dénominateur, ce qui ne détruira pas l'égalité des deux membres; prenant ensuite la racine carrée du premier membre et indiquant celle du second, on aura la formule

$$v = \sqrt{2gx},$$

qui renferme la règle suivante: la hauteur x de la chute d'un corps étant donnée, pour calculer la vitesse acquise au bout de cette chute, multipliez $2x$, double de la hauteur donnée, par $g = 9^m{,}8089$, et cherchez la racine carrée du produit; cette racine sera la vitesse demandée.

Exemple. — Trouver la vitesse acquise par un corps en tombant d'une hauteur de $32^m{,}25$.

Le double de la hauteur $2x = 2 \times 32^m{,}25 = 64^m{,}5$; en substituant ce nombre, et la valeur de g dans la formule, le second membre ne renfermera que des opérations numériques, que l'on pourra effectuer directement, ou bien par le moyen des Tables de logarithmes, de la manière suivante:

$$v = \sqrt{64^m{,}5 \times 9^m{,}8089}.$$

$\frac{1}{2}$ log 64,5..........	0.9047798
$\frac{1}{2}$ log 9,8089........	0.4958101
log 25,153........	1.4005899

Réponse. — La vitesse demandée est de $25^m,153$; c'est ce qu'on nomme la vitesse due à une hauteur de $32^m,25$.

On trouve la vitesse v due à la hauteur x, lorsque cette hauteur est donnée, par le moyen de la formule $v = \sqrt{2gx}$; si la vitesse v était donnée, la même formule fournirait une règle pour calculer la hauteur x due à cette vitesse. On obtiendra cette règle en résolvant l'équation par rapport à x: on élève d'abord les deux membres au carré, pour faire disparaître le radical, et l'équation devient

$$2gx = v^2,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{v^2}{2g};$$

c'est-à-dire que, pour avoir la hauteur due à une vitesse donnée, il faut diviser le carré de cette vitesse par le double de la force accélératrice.

Exemple. — Trouver de quelle hauteur un corps doit tomber, pour acquérir une vitesse de 25 mètres.

En faisant $v = 25$, et mettant à la place de g sa valeur $9^m,8089$, la formule devient

$$x = \frac{\overline{25}^2}{2 \times 9,8089}$$

2 log 25..........	2.7958800
c log 2...........	9.6989700
c log 9,8089......	9.0083797
log 31,858......	21.5032297

Les calculs étant effectués, on trouve que la hauteur due à la vitesse de 25 mètres, est de $31^m,858$.

193. Nous avons supposé jusque ici que la force accélératrice, ou la pesanteur, agissant sur uu corps auquel elle communique un mouvement uniformément accéléré, l'effet de cette force commençait à l'origine dn mouvement, et que l'on comptait le temps à partir de cette origine.

Les formules $v = gt$, et $x = \frac{1}{2}gt^2$, que nous avons obtenues d'après cette supposition, ne renferment donc pas généralement les lois du mouvement uniformément varié; pour donner à ces formules un plus grand degré de généralité, il faut y introduire la condition d'une vitesse initiale avec laquelle le mouvement produit par la pesanteur se combine, soit par addition, soit par soustraction, suivant que cette vitesse initiale agit dans le sens de la pesanteur, ou dans le sens opposé; c'est de ce dernier cas que nous allons principalement nous occuper.

Désignons par V la vitesse initiale communiquée par un choc, ou par une impulsion, à un mobile soumis en même temps à l'action de la pesanteur, et supposons que la direction du choc qui a produit la vitesse initiale soit inverse de celle de la pesanteur; cette condition étant introduite dans les formules précédentes, elles deviennent:

$$v = V - gt, \quad x = Vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Ces deux équations expriment que le mouvement est uniformément retardé.

Si l'on prend dans la première de ces équations la valeur de $t = \frac{V - v}{g}$, et qu'on substitue cette valeur à la place de t dans la seconde, on obtiendra la formule suivante:

$$x = \frac{V^2 - v^2}{2g}.$$

Ces trois formules peuvent servir à résoudre divers problèmes sur le mouvement uniformément retardé; nous les appliquerons à quelques exemples.

Premier exemple. On demande avec quelle vitesse un corps doit être lancé verticalement, pour s'élever en deux secondes à la hauteur de 40 mètres.

La deuxième formule donne, pour l'expression de la vitesse initiale:

$$V = \frac{x + \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{2x + gt^2}{2t};$$

en faisant $x = 40$, $g = 9{,}8089$, $t = 2$, cette formule devient

$$V = \frac{2 \times 40 + 9{,}8089 \times 4}{4} = 20 + 9{,}8089 = 29^m{,}8089.$$

La force initiale demandée devra être de $29^m{,}8089$.

Deuxième exemple. Un corps lancé verticalement de bas en haut, avec une vitesse de $29^m{,}8089$, s'est élevé de 40 mètres; on demande au bout de quel temps il est parvenu à cette hauteur.

Pour trouver le temps t du mouvement d'ascension, il faut résoudre l'équation du second degré

$$Vt - \frac{1}{2}gt^2 = x;$$

en changeant les signes, ordonnant et dégageant le premier terme de son coefficient, cette équation devient

$$t^2 - \frac{2V}{g}t = -\frac{2x}{g},$$

et sa résolution donne

$$t = \frac{V}{g} \pm \sqrt{\frac{V^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 2gx}}{g}.$$

En substituant les valeurs des lettres V et x, indiquées dans l'énoncé du problème, et remplaçant la lettre g par sa valeur, cette formule devient

$$t = \frac{29,8089 \pm \sqrt{\overline{29,8089}^2 - 80 \times 9,8089}}{9,8089}.$$

Les opérations indiquées sous le radical étant effectuées, on aura

$$t = \frac{29,8089 - 10,1911}{9,8089} = \frac{19,6178}{9,8089} = 2'',$$

$$t = \frac{29,8089 + 10,1911}{9,8089} = \frac{40}{9,8089} = 4'',08.$$

Ces deux valeurs de t, ou ces deux racines de l'équation, étant réelles et positives, elles satisfont toutes les deux au problème. La plus petite racine indique qu'au bout de deux secondes d'ascension, le mobile est à 40 mètres de hauteur; il continue à monter jusqu'au point culminant, où sa vitesse de projection est entièrement détruite par l'action de la pesanteur; alors il descend avec un mouvement uniformément accéléré, et 4'',08 après son départ, il se retrouve à la hauteur de 40 mètres.

Troisième exemple. Un corps est lancé verticalement avec une vitesse de $29^{m},8089$; on demande au bout de quel temps cette vitesse sera détruite.

La pesanteur détruit graduellement la vitesse avec laquelle le corps a été lancé, comme on le voit par la formule

$$v = V - gt;$$

en faisant V = 29,8089, et remplaçant g par sa valeur nu-

mérique 9,8089, on aura

$$v = 29{,}8089 - 9{,}8089\,t;$$

cette vitesse est entièrement détruite lorsqu'on a

$$0 = 29{,}8089 - 9{,}8089\,t,$$

ce qui donne

$$t = \frac{29{,}8089}{9{,}8089} = 3{,}039.$$

Le temps demandé est à peu près de 3″,04.

Quatrième exemple. Trouver la plus grande hauteur verticale à laquelle s'élèvera un mobile dont la vitesse initiale est de $29^{m},8089$.

La formule $x = \frac{V^2 - v^2}{2g}$ fait voir que la hauteur du mobile augmente à mesure que la vitesse v diminue; lorsque cette vitesse est nulle, le mobile est parvenu à la plus grande hauteur qu'il puisse atteindre, et l'on a $x = \frac{V^2}{2g}$ pour l'expression générale de cette hauteur.

En substituant, dans cette dernière formule, les valeurs des lettres V et g, pour le cas particulier qu'il s'agit de calculer, et effectuant ensuite les calculs indiqués, on aura

$$x = \frac{\overline{29{,}8089}^2}{2 \times 9{,}8089}.$$

2 log 29,8089....	2.9486918
c. log 2..........	9.6989700
c. log 9,8089.....	9.0083797
log x..........	21.6560415

$$x = 45^{m},29408.$$

47..

On énonce ce résultat en disant que $45^m,2941$ est la hauteur due à la vitesse de $29^m,8089$; en effet, si le mobile tombe de la hauteur que nous venons de déterminer, il aura acquis cette dernière vitesse lorsqu'il sera parvenu au bas de sa chute.

Mouvement sur des plans inclinés.

194. Nous avons vu dans les articles précédents que la pesanteur est une force constante qui agit sur tous les corps, et que cette force leur communique un mouvement uniformément accéléré suivant la direction verticale, lorsque rien ne s'oppose à leur chute.

La direction verticale du mouvement imprimé par la pesanteur peut être changée; cette direction devient oblique lorsque les corps glissent sur des plans inclinés: alors le mouvement est moins rapide que celui qui a lieu par la chute verticale, mais il suit les mêmes lois, c'est-à-dire qu'il est uniformément accéléré: en effet, un corps qui glisse sur un plan incliné par l'action de la pesanteur, reçoit à chaque instant de nouvelles impulsions, ou de nouveaux degrés de vitesse qui s'ajoutent à ceux qui ont été produits par les impulsions précédentes, ce qui doit produire un mouvement uniformément accéléré.

Soit ABC (*fig.* 118) une section faite par un plan vertical dans un plan incliné; la droite AB, perpendiculaire à toutes les lignes horizontales menées dans le plan incliné, sera la longueur de ce plan, qui aura pour hauteur la verticale AC.

Nous désignerons, pour abréger, la longueur AB et la hauteur AC, du plan incliné, par les lettres l et h, en observant

que le rapport $\frac{h}{l}$ peut être remplacé par le sinus de l'angle B que le plan incliné forme avec le plan horizontal, ou par le cosinus du complément de cet angle.

Si un corps pesant est placé en A, et qu'il soit abandonné à l'action de la pesanteur, sans éprouver de résistance sensible de la part du frottement, cette force lui fera descendre le plan incliné suivant la droite AB.

Représentons par la ligne verticale Ar la vitesse que la pesanteur communiquerait au corps A, pendant la première seconde de sa chute, ou la valeur de la force accélératrice que nous avons désignée par g; décomposons cette force en deux autres, d'après le théorème du parallélogramme des forces (**16**), de sorte que l'une des composantes soit représentée par la droite An, perpendiculaire au plan incliné, et l'autre par la droite Am, parallèle au même plan. La première composante est détruite par la résistance du plan incliné; il ne reste que la seconde Am, dont il s'agit de déterminer la valeur.

Les deux triangles rectangles ACB, Amr, qui ont un angle commun, sont équiangles et semblables, ce qui donne la proportion

$$AB : AC :: Ar : Am;$$

et d'après la notation algébrique,

$$l : h :: g : Am = \frac{gh}{l}.$$

Cette valeur de Am, ou l'espace que la pesanteur fait parcourir au mobile dans la première seconde de sa descente sur le plan incliné, est le produit de la force accélératrice g par le rapport $\frac{h}{l}$; d'où il résulte que les formules du mouve-

ment uniformément accéléré, dans la chute verticale des corps, donneront celles du mouvement sur les plans inclinés, en mettant dans les premières $\frac{gh}{l}$ à la place de g. Ainsi les lois de la descente d'un corps sur des plans inclinés, seront exprimées par les formules suivantes:

$$v=\frac{ght}{l},\quad x=\frac{\frac{1}{2}ght^2}{l},\quad t=\sqrt{\frac{2lx}{gh}},$$

$$v=\sqrt{\frac{2gxh}{l}},\quad x=\frac{lv^2}{2gh}.$$

La première de ces formules fera connaître la vitesse acquise par un corps qui est descendu, pendant un temps quelconque t, le long d'un plan incliné; par la seconde, on calculera l'espace parcouru; la troisième, qui renferme la relation entre la vitesse acquise et l'espace parcouru, servira pour calculer la valeur de l'une de ces quantités lorsque l'autre sera connue. Nous allons donner quelques exemples, et il sera utile, pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec l'usage des formules, de s'en proposer d'autres pour s'exercer.

Premier exemple. Un corps est descendu pendant 5 secondes, en glissant le long d'un plan incliné dont la longueur est de 40 mètres, et la hauteur de 12 mètres; on demande la vitesse acquise.

Les valeurs numériques étant substituées à la place des lettres, la première formule donnera

$$v=\frac{9,8089\times 12\times 5}{40}=14,71335.$$

Au bout de 5 secondes, la vitesse acquise par le mobile lui ferait parcourir un espace de $14^{m},713$ par seconde.

Deuxième exemple. Les mêmes choses étant données que dans le premier exemple, trouver l'espace que la pesanteur fera parcourir au mobile pendant 5 secondes.

Cette question sera résolue par la formule $x = \frac{\frac{1}{2}gt^2h}{l}$, qui devient, par la substitution des nombres donnés,

$$x = \frac{\frac{1}{2} \times 9,8089 \times 12 \times 25}{40} = 36,783375.$$

L'espace que le mobile aura parcouru au bout de 5″, est de 36^m,783, en négligeant les décimales d'un ordre inférieur aux millimètres.

Troisième exemple. Si un corps glisse le long d'un plan incliné dont la longueur est de 40 mètres et la hauteur de 12 mètres, quelle sera la vitesse acquise par ce corps, lorsqu'il sera descendu jusqu'au bas du plan.

Puisque le corps, ou le mobile, parcourt la longueur entière du plan incliné, on a

$$x = l, \quad v = \sqrt{\frac{2gxh}{l}} = \sqrt{2gh}.$$

Substituant les valeurs des lettres dans cette dernière formule, et effectuant les calculs, il viendra

$$v = \sqrt{2 \times 9,8089 \times 12} = 15,343.$$

La vitesse acquise sera de 15^m,343.

La formule $v = \sqrt{2gh}$ est l'expression de la vitesse acquise par un corps qui serait tombé verticalement de la hauteur h du plan incliné, ou la vitesse due à la hauteur AC: d'où il résulte que si un corps glisse le long d'un plan in-

cliné, lorsqu'il sera descendu jusqu'au bas de ce plan, sans que la vitesse qui lui est communiquée par la pesanteur soit diminuée par aucun obstacle, il aura acquis la même vitesse que s'il était tombé verticalement d'une hauteur égale à celle du plan incliné.

Cette proposition est vraie pour toutes les longueurs prises sur le plan incliné; c'est-à-dire que lorsqu'un corps a parcouru une distance quelconque, en glissant le long d'un plan incliné, sa vitesse est la même que celle qu'il aurait acquise en tombant verticalement d'une hauteur égale à celle de ce plan.

Le corps A ayant parcouru la distance AM sur le plan incliné AB, par le point M menez l'horizontale MR, qui rencontre la verticale AC au point R; la vitesse acquise en parcourant la distance AM, sur le plan incliné, sera égale à la vitesse due à la hauteur verticale AR.

Puisque la vitesse acquise par un corps qui glisse le long d'un plan incliné est égale à la vitesse due à la hauteur de ce plan, si l'on a plusieurs plans inclinés AB, AD, AE, de même hauteur AC, les longueurs de ces plans étant différentes, la vitesse acquise par un corps sera toujours la même, quel que soit celui de ces plans le long duquel il soit descendu, par l'action seule de la pesanteur.

Le temps n'est pas compris dans cette formule: si deux plans inclinés de même hauteur, qui ont des longueurs différentes, sont parcourus par des corps, ou par des mobiles, la durée de la descente sur le plan le plus long sera plus grande que sur celui qui est le plus court.

Quatrième exemple. Trouver en combien de temps un corps descendra le long d'un plan incliné, dont la longueur est de 40 mètres et la hauteur de 12 mètres.

La distance x que le mobile doit parcourir sur le plan incliné étant égale à la longueur l de ce plan, la formule $t=\sqrt{\frac{2lx}{gh}}$ deviendra $t=\sqrt{\frac{2l^2}{gh}}=l\sqrt{\frac{2}{gh}}$.

En substituant les nombres donnés dans cette dernière formule, on aura

$$t=\sqrt{\frac{2}{9,8089\times 12}}.$$

Les calculs peuvent être effectués directement, mais pour abréger nous nous servirons des Tables de logarithmes.

log 40........	1.6020600
$\frac{1}{2}$ log 2.........	0.1505150
$c\,\frac{1}{2}$ log 9,8089....	9.5041899
$c\,\frac{1}{2}$ log 12.........	9.4604094
log t..........	20.7171743

$$t=5,215.$$

En négligeant les décimales d'un ordre inférieur aux dixièmes de seconde, on aura 5'',2 pour le temps de la descente du mobile sur le plan incliné.

Cinquième exemple. Le plan incliné étant le même que dans les exemples précédents, on demande l'espace que le mobile devra parcourir sur ce plan, pour acquérir la vitesse de $9^m,8089$.

La solution de ce problème est donnée par la formule

$$x=\frac{lv^2}{2gh};$$

en substituant les nombres donnés à la place des lettres, et observant que deux de ces lettres, v et g, ont la même va-

leur, on aura

$$x = \frac{40 \times 9,8089}{2 \times 12} = 16,348.$$

Après avoir parcouru $16^m,348$, le mobile aura acquis la vitesse de $9^m,8089$.

Cet espace de $16^m,348$, que le mobile a parcouru sur le plan incliné, étant multiplié par le rapport $\frac{h}{l} = \frac{12}{40} = 0,3$, le produit $4^m,9044$ sera la hauteur due à la vitesse acquise par le mobile, au bout de la première seconde de sa chute verticale.

195. Si un corps tombe verticalement d'une hauteur x, le temps de la chute sera donné par la formule $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$.

Pour le temps de la descente sur un plan incliné, dont la longueur l est égale à l'espace x parcouru sur ce plan, on a $t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}$.

Ces deux formules donnent

$$\frac{2x}{g} = \frac{2l^2}{gh}, \quad x = \frac{l^2}{h}, \quad hx = l^2.$$

Cette dernière formule renferme l'expression de la proposition suivante:

Si deux corps, ou deux mobiles, partent au même instant, d'une même hauteur, que l'un de ces mobiles tombe verticalement, et que l'autre descende le long d'un plan incliné, la longueur du plan incliné parcouru par le second mobile, sera moyenne proportionnelle entre la hauteur de ce plan et la verticale décrite dans le même temps par le premier mobile.

Soit A le point de départ des deux mobiles, dont l'un tombe suivant la verticale AC, et l'autre descend sur le plan incliné AB; supposons que ce deuxième mobile soit descendu jusqu'au point M, et par ce point menons la droite MN perpendiculaire au plan incliné, qui rencontre la verticale AC au point N: la hauteur verticale AN, et la distance AM sur le plan incliné, seront parcourues dans le même temps par les deux mobiles.

Le triangle AMN est rectangle, et si l'on mène la droite MR perpendiculaire à la verticale AC, on aura les deux triangles rectangles ARM, AMN, qui ont l'angle commun A; donc ces deux triangles sont équiangles, et leurs côtés homologues donnent la proportion

$$AR : AM :: AM : AN.$$

En égalant le produit des extrêmes au produit des moyens, on aura

$$AN \times AR = \overline{AM}^2.$$

Le résultat de cette démonstration géométrique est conforme à celui que nous avons trouvé par l'analyse algébrique; on en déduit les conséquences suivantes.

Si dans un plan vertical on décrit un cercle AMBS (*fig.* 119), et que de l'extrémité supérieure A du diamètre vertical AB, on mène les cordes AM, AN, AP, AS, etc., toutes ces cordes seront parcourues dans le même temps par des mobiles partant de leur origine commune A.

L'angle AMB, inscrit dans le demi-cercle, est un angle droit; et d'après la proposition que nous venons de démontrer, la descente d'un mobile le long de la corde, ou du plan

incliné AM, aura lieu dans un temps égal à celui de la chute d'un autre mobile de la hauteur du diamètre vertical AB.

Le même raisonnement s'applique à toutes les cordes menées par l'extrémité supérieure A du diamètre vertical.

Les cordes MB, NB, PB, SB, etc., qui aboutissent à l'extrémité inférieure B du diamètre vertical AB, seront pareillement parcourues dans le même temps, par des mobiles partant de leurs extrémités supérieures M, N, P, S, etc.; car le temps employé par un mobile à parcourir l'une quelconque de ces cordes, est le même que celui qui serait employé à parcourir une autre corde menée par le point A, parallèlement à la première, et qui lui serait égale. Ce temps, comme on vient de le prouver, est le même que celui de la chute du mobile qui tombe de la hauteur du diamètre vertical AB.

196. Si un corps est lancé de bas en haut d'un plan incliné, par une force qui lui communique une vitesse initiale, la pesanteur agira sur cette vitesse, dans une direction opposée, et le mouvement sera uniformément retardé.

La longueur AB, du plan incliné ABC (*fig.* 118), étant désignée par l, et sa hauteur par h; si un choc, ou une impulsion produite par une force quelconque, qui agit dans la direction BA, communique une vitesse V à un mobile, placé à l'intersection B du plan incliné avec le plan horizontal; en désignant par α l'angle formé par ces deux plans, les règles du mouvement seront exprimées par les formules suivantes, qui se déduisent de celles du mouvement vertical d'ascension (**193**), par la substitution de $\frac{gh}{l} = g\cos\alpha$ à la place de g :

$$v = V - g\cos\alpha, \quad x = Vt - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\alpha, \quad x = \frac{V^2 - v^2}{2g\cos\alpha}.$$

Ces formules serviront à résoudre les divers problèmes qui

dépendent du mouvement d'ascension d'un corps sur un plan incliné.

197. Nous venons d'exposer les lois du mouvement uniformément varié que l'action de la pesanteur fait naître dans les corps, près de la surface de la terre : nous avons donné les formules qui servent à résoudre les divers problèmes que l'on peut proposer sur ce mouvement, en faisant abstraction de la résistance de l'air dans la chute et l'ascension verticale des corps, et lorsqu'ils se meuvent sur des plans inclinés ; dans ce dernier cas, ils éprouvent encore une autre résistance, qui est produite par le frottement.

Les résultats de la théorie ne doivent donc être adoptés qu'après leur avoir fait subir les modifications que l'on déduit de l'expérience, à moins que l'on ne parvienne, par des précautions convenablement appliquées, à rendre presque insensibles les obstacles qui pourraient les altérer.

On a fréquemment l'occasion d'observer les phénomènes produits par la pesanteur dans la chute des corps ; on peut les reproduire à volonté : cependant aucun des philosophes de l'antiquité qui ont consacré leur vie à la recherche des lois de la nature, n'est parvenu à apercevoir celles du mouvement que ces phénomènes présentent.

Cette découverte est due à Galilée : c'est à cet homme illustre que nous devons la connaissance des lois du mouvement uniformément varié produit par la pesanteur dans la chute et l'ascension des corps, près de la surface de la terre : lorsqu'il fut nommé professeur à l'université de Pise, vers 1589, on répétait encore, d'après Aristote, que les corps tombent d'autant plus vite qu'ils pèsent davantage ; Galilée fit voir, en laissant tomber du sommet de la tour penchée de Pise, dont la hauteur est de 100 brasses ($58^m,19$), un corps du

poids de 100 livres et une balle de 1 livre, que ces deux corps, de même métal, arrivaient à terre sensiblement dans le même temps. Cette expérience produisit une grande sensation; elle confirmait la vérité que son génie lui avait fait entrevoir, c'est que la pesanteur agit sur les corps proportionnellement à leurs masses, et que l'inégalité des poids n'est pas la cause de la différence des temps dans la chute de ceux qui tombent d'une même hauteur; cette différence ne doit être attribuée qu'à la résistance de l'air, dont l'action se fait sentir davantage à ceux qui ont un plus grand volume et qui renferment une moindre masse, ou une plus petite quantité de matière.

Cette vérité constatée était déjà un grand pas de fait, mais il fallait un génie comme celui de Galilée pour achever de trouver les lois du mouvement produit par la pesanteur, et il parvint en effet à les découvrir: on sera peut-être surpris en apprenant que des découvertes aussi importantes, qui sont le plus beau titre de la gloire si justement acquise par ce grand homme, n'ont été publiées que quelques années avant sa mort.

Galilée passa les dernières années de sa vie à Arcetri, dans une espèce d'exil, sous la surveillance de l'inquisition; le comte de Noailles lui fit une visite en revenant de Rome où il était ambassadeur, et Galilée lui dédia ses *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due scienze attenente alla Mecanica.* Cet ouvrage, divisé en six journées, ou dialogues, dont la dédicace est datée du 6 mars 1638, que l'auteur n'avait pas osé faire imprimer en Italie, fut publié la même année à Leyde, par les Elzevirs; il renferme l'origine de plusieurs découvertes très importantes, qui avaient besoin d'être complétées; on y trouve les deux propositions sui-

vantes, démontrées par la géométrie, et confirmées par l'expérience.

I. Dans le mouvement uniformément accéléré, la vitesse acquise par le mobile, au bont d'un temps quelconque, ferait parcourir à ce mobile, dans le même temps, avec un mouvement uniforme, un espace double de celui qu'il a parcouru avant d'avoir acquis cette vitesse.

II. Un corps qui descend d'une certaine hauteur, avec un mouvement uniformément accéléré, parcourt des espaces qui sont entre eux comme les carrés des temps.

Ce sont les propositions fondamentales que nous avons démontrées (**191**), et qui sont résumées dans les formules

$$v = gt, \quad x = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

On peut employer ces formules pour calculer les valeurs de deux quelconques des quantités v, x et t, lorsque la troisième est connue.

198. Galilée a prouvé que le mouvement sur des plans inclinés est aussi un mouvement uniformément varié, comme ceux de la chute et de l'ascension verticale; il n'y a d'autre différence que celle du ralentissement, occasionné par sa direction plns ou moins oblique avec la verticale. La vitesse acquise par le mobile est toujours égale à celle qui résulterait d'une chute verticale de même hauteur que celle du plan incliné le long duquel il est descendu.

Les lois énoncées dans les propositions que nous venons de rapporter, avaient besoin d'être confirmées par des expériences; elles ont été faites par Galilée, avec des moyens simples et ingénieux dont nons allons donner une explication succincte.

Il a pris un madrier, ou une planche suffisamment épaisse, pour faire une règle qui devait être posée de champ, pour éviter la flexion, et former un plan incliné dont la longueur était de 12 brasses $= 6^m,983$; il avait creusé, dans l'épaisseur de cette règle, une rainure, ou un canal, dans lequel il avait collé une garniture de vélin, afin de diminuer le frottement du mobile qui devait le parcourir.

Le mobile était une boule de cuivre, ou de bronze, bien polie, d'un diamètre un peu moindre que la largeur du canal.

On pouvait fixer à volonté la hauteur, ou l'inclinaison, du plan incliné formé avec la règle; mais cette inclinaison devait être déterminée de manière qu'il fût possible de mesurer le temps de chaque expérience.

Ces dispositions étant faites, et le canal étant fermé au quart de sa longueur, à partir du sommet, Galilée observa le temps que le mobile, abandonné à l'action de la pesanteur, mettait à parcourir cette portion du plan incliné; il observa ensuite le temps pendant lequel le mobile parcourait la longueur entière du plan incliné, et il trouva que le temps de cette deuxième expérience était double de celui de la première. Ainsi, dans un temps double, l'action de la pesanteur sur le mobile lui faisait parcourir un espace quadruple.

Toutes les expériences de Galilée, et il en fit un grand nombre, confirmèrent la loi des espaces parcourus proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir, et cette loi observée sur des plans inclinés, est la même pour les chutes verticales, où la simple observation ne suffit pas pour les distinguer, à cause de la rapidité du mouvement.

Avant l'invention des horloges à pendule, le temps se mesurait par des clepsydres, ou des horloges d'eau; c'est ce dernier moyen qui fut employé par Galilée: ayant suspendu un vase qui renfermait de l'eau, et dont le fond était percé d'une très petite ouverture, l'eau coulait par cette ouverture dans une tasse, et l'on pesait dans une balance avec une grande exactitude la quantité d'eau écoulée pendant que la boule avait parcouru, soit la longueur entière du plan incliné, soit une partie déterminée de ce plan.

Nous avons trouvé (**194**) que lorsqu'un mobile descend le long d'un plan incliné dont la hauteur est représentée par h et la longueur par l, en faisant abstraction de la résistance produite par le frottement, on a

$$x = \frac{ght^2}{2l}, \quad t = \sqrt{\frac{2lx}{gh}};$$

si le temps t est donné, on calculera la valeur de x, ou l'espace parcouru, par la première de ces formules; lorsqu'on connaît l'espace parcouru, on peut calculer le temps par la deuxième formule.

Galilée n'a pas donné le détail des calculs qu'il a faits pour constater que les lois du mouvement uniformément varié, qu'il avait découvertes, sont d'accord avec l'expérience; il est facile de refaire ces calculs par le moyen des formules précédentes.

La longueur du plan incliné $l = 6^{m},983$; supposons que sa hauteur $h = 1$ mètre, et que le mobile soit arrêté au quart de la longueur, ce qui donne $x = \frac{1}{4}l$: en substituant ces nombres à la place des lettres, dans la deuxième formule, nous

aurons

$$t = 6{,}983\sqrt{\frac{1}{2\times 9{,}8089}} = 1'',57.$$

log 6,983......	0.8440420
c. $\frac{1}{2}$ log 2..........	9.8494850
c. $\frac{1}{2}$ log 9,8089.....	9.5041899
log t..........	20.1977169

$$t = 1{,}5765.$$

En faisant parcourir au mobile la longueur entière du plan incliné, on a $x = l$, et la formule devient

$$t = 6{,}983\sqrt{\frac{2}{9{,}8089}} = 3'',15.$$

log 6,983.........	0.8440420
$\frac{1}{2}$ log 2.............	0.1505150
c. $\frac{1}{2}$ log 9,8089........	9.5041899
log t.............	10.4987469

$$t = 3{,}1531.$$

Dans ces deux expériences, les temps sont comme 1 : 2, et les espaces parcourus comme 1 : 4, ou comme les carrés des temps.

Le canal étant barré successivement à la moitié, aux $\frac{2}{3}$ et aux $\frac{3}{4}$ de la longueur du plan incliné, en faisant les calculs comme dans les exemples précédents, on trouvera 2'',23, 2'',58 et 2'',73, pour les temps qui seront employés par le mobile à parcourir ces trois espaces partiels.

Si l'on multiplie l'espace parcouru par le mobile dans la

première expérience par le carré du rapport de l'un des termes de la suite des temps à celui de la première expérience, le produit sera l'espace parcouru dans la descente qui correspond à ce terme: par exemple, en multipliant $1^{m},746$ par le carré de $\frac{2,58}{1,57}$, on aura

$$1,746 \times \left(\frac{2,58}{1,57}\right)^2 = 4,715$$
$$\tfrac{2}{3}\,l = 4,655$$
$$\text{Différence.} \;.\;.\;.\; 0,060.$$

Le moyen imaginé par Galilée pour ralentir le mouvement uniformément accéléré, sans changer sa nature, afin de le rendre sensible à la simple inspection, a été employé par les physiciens, avec diverses modifications, jusqu'à l'invention de la machine d'Atwood; nous donnerons, dans le chapitre suivant, les formules qui renferment la théorie de cette belle et ingénieuse machine.

De la mesure des forces.

199. En considérant les forces d'après les effets qu'elles produisent, on les divise en deux classes. La première classe comprend les forces dont les effets paraissent instantanés, parce que la rapidité avec laquelle ils sont produits ne nous permet pas d'en mesurer la durée: tels sont les chocs par lesquels on fait passer les mobiles de l'état de repos à celui de mouvement uniforme; les explosions produites par l'inflammation de la poudre, celles qui résultent de la concentration de la vapeur, de celle des gaz et de l'électricité. La seconde classe comprend la pesanteur, ou la gravité, qui agit

sur tous les corps; la résistance de l'air, celle des fluides, le frottement: ce sont principalement les effets de ces forces continues que l'on considère dans la Dynamique.

La mesure des forces qui entrent dans les questions d'équilibre se réduit, comme nous l'avons vu dans la Statique (7), à déterminer la force que l'on veut preudre pour unité; une autre force sera égale à cette unité, si ces deux forces se font équilibre, et leur somme sera une force double. Le rapport des forces étant établi de cette manière, elles peuvent être représentées, soit par des nombres, soit par des lignes droites proportionnelles à ces nombres, prises sur les directions des forces.

Cette mesure des forces est insuffisante pour les questions de la Dynamique, où l'on considère les forces par rapport aux mouvements qu'elles peuvent produire; alors la vitesse, qui n'était d'aucun usage dans la Statique, est l'une des quantités qui doivent entrer dans la mesure des forces, soit que l'on suppose ces forces appliquées à de simples points matériels, soit qu'elles agissent sur des corps tels que ceux dont on fait usage dans les arts, et qui servent de matériaux pour les diverses constructions.

200. Tous les corps ont des propriétés qui leur sont inhérentes, et dans chaque branche des sciences naturelles on s'occupe particulièrement de quelques-unes de ces propriétés; nous allons donner quelques explications sur celles qui forment des quantités en usage dans la Dynamique, et sur les modifications que produisent ces corps dans les actions des forces qui leur sont appliquées.

Un corps est terminé par des surfaces planes ou courbes; son volume est l'espace compris entre ces surfaces.

Les particules matérielles qui forment la masse d'un corps

sont disséminées dans son volume; lorsque ces particules sont de même nature, et que la répartition de la masse est uniforme, des parties égales en volume contiennent des masses égales, ce qui forme un corps *homogène;* le corps sera *hétérogène,* si des parties égales de son volume contiennent des masses inégales.

La comparaison des corps de même volume, par rapport à leurs masses, se nomme *densité;* la densité d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce même corps, et par conséquent les densités de deux corps sont proportionnelles à leurs masses.

Désignons le volume par V, la masse par M, la densité par D, le poids par P et la pesanteur par g; nous aurons

$$M = DV, \quad P = Mg = DVg.$$

La quantité $g = 9^{m},8089$; cette valeur a été déterminée par les expériences du pendule, comme nous le verrons plus loin. Il reste quatre quantités, parmi lesquelles deux quelconques étant données, les équations précédentes feront connaître les valeurs des deux autres.

On considère principalement, dans la Mécanique, les corps solides par rapport aux modifications que les puissances, ou les forces, peuvent leur faire éprouver.

Deux corps ne peuvent pas occuper le même espace: on peut les comprimer, mais ils ne coïncideront pas l'un avec l'autre, comme les corps géométriques, que l'on suppose dépourvus de particules matérielles; cette propriété générale de la matière se nomme impénétrabilité.

On appelle *corps durs* ceux dont les parties intégrantes n'éprouvent aucun dérangement, et qui conservent la même

forme, qui n'est altérée ni par les chocs ni par les pressions contre d'autres corps. Quoique l'on ne connaisse aucun corps parfaitement dur, les raisonnements que l'on fait dans cette supposition conduisent à des résultats qui s'écartent peu de ceux que l'on obtient dans les expériences sur les corps les plus durs que l'on puisse se procurer.

Un corps *mou* est celui dont la forme peut être changée par le choc ou par la pression qu'une puissance lui fait éprouver, et qui conserve la nouvelle forme qu'il a été obligé de prendre; une sphère de plomb qui est frappée, ou qui éprouve une pression capable de l'aplatir, conserve la forme qu'elle a reçue par l'action de la puissance à laquelle elle a été soumise.

On appelle corps *élastique* celui dont la forme peut être changée par un choc ou par une pression, mais qui reprend sa première forme immédiatement après que la puissance à laquelle il a été soumis cesse d'agir sur lui.

Si un corps élastique, dont nous supposerons la forme sphérique, est lancé dans une direction perpendiculaire à un obstacle fixe et inflexible, en frappant contre cet obstacle, la contraction du mobile fera raccourcir son diamètre perpendiculaire à l'obstacle, et la longueur de celui qui est parallèle augmentera; mais immédiatement après le choc, le mobile se rétablira dans sa première forme, et la force qui lui sera restituée lui communiquera un mouvement opposé, suivant sa direction primitive; si l'élasticité du mobile était parfaite, sa vitesse rétrograde serait égale à celle qu'il a reçue de la force par laquelle il a été mis en mouvement.

Le degré d'élasticité d'un corps est déterminé par le rapport entre la vitesse qui lui est communiquée par la force

qui l'a mis en mouvement et celle qui lui est restituée par l'élasticité.

201. Après avoir indiqué les propriétés générales des corps solides, nous allons chercher comment on peut mesurer les intensités des forces qui leur sont appliquées; nous considérerons d'abord les forces qui agissent instantanément: un corps qui est mis en mouvement par le choc, ou par l'impulsion d'une force, se meut suivant la direction rectiligne de l'impulsion qu'il a reçue, et il parcourt des distances égales dans des temps égaux, c'est-à-dire que son mouvement est uniforme.

Si deux forces sont appliquées successivement à un même corps, les vitesses qu'elles lui imprimeront seront égales ou inégales; si les deux forces produisent des vitesses égales, ou la même vitesse, on en conclura que ces forces sont égales; si elles agissaient simultanément en sens contraire, dans la direction d'une même ligne droite, leurs effets se détruiraient et le mobile resterait en équilibre.

Lorsque deux forces appliquées successivement à un même mobile lui impriment des vitesses inégales, ces forces sont évidemment inégales, et la plus grande est celle qui imprime au mobile la plus grande vitesse; on peut même conclure, quoiqu'on ne puisse pas le prouver par une démonstration rigoureuse, que les deux forces sont entre elles comme les vitesses qu'elles impriment au mobile. En effet, cette hypothèse est la plus simple et la plus vraisemblable de toutes celles que l'on pourrait supposer; elle est d'ailleurs conforme à l'expérience, et c'est en l'admettant que Galilée a vérifié, sur des plans inclinés, les lois du mouvement uniformément accéléré dans le chute verticale des corps.

Il y a donc, dans la Dynamique, deux principes géné-

raux, ou deux lois fondamentales du mouvement, qui n'ont été l'objet d'aucune controverse sérieuse, quoique fondées seulement sur des hypothèses confirmées par l'expérience : ce sont la loi de l'inertie (**186**), et celle dont nous venons de donner l'explication, qui consiste dans la proportionnalité des forces aux vitesses ; d'après cette dernière loi, le rapport dee forces pourra être remplacé par celni des vitesses.

202. Deux forces f et f', qui communiquent la même vitesse à deux masses différentes m et m', sont entre elles comme ces masses.

Cette proportionnalité des forces aux masses, lorsque les vitesses sont égales, se déduit de considérations analogues à celles par lesquelles on explique la proportion des forces aux vitesses, pour une même masse.

Trouver le rapport de deux forces f et f', qui impriment, dans le même instant, les vitesses v, v', aux mobiles dont m et m' sont les masses.

Soient F et F' deux autres forces, et M la masse d'un mobile tel que ces forces lui impriment les vitesses v, v' ; on aura la proportion

$$\mathrm{F} : \mathrm{F}' :: v : v' ;$$

puisque les forces f, F, impriment la même vitesse v aux masses m, M, on aura

$$m : \mathrm{M} :: f : \mathrm{F} = \frac{\mathrm{M}f}{m},$$

et par un raisonnement semblable, les forces f', F', donneront

$$m' : \mathrm{M} :: f' : \mathrm{F}' = \frac{\mathrm{M}f'}{m'}.$$

Substituant ces valeurs des forces auxiliaires F et F' dans la

première proportion, et négligeant la masse M, qui serait facteur commun dans les termes du premier rapport, il viendra

$$\frac{f}{m} : \frac{f'}{m'} :: v : v', \quad \text{ou} \quad f : f' :: mv : m'v'.$$

Il résulte de cette dernière proportion, que les deux forces f, f', qui agissent sur les mobiles dont les masses sont m, m', et qui leur impriment les vitesses v, v', sont entre elles comme les produits de ces masses par leurs vitesses.

Si les forces f, f' sont égales, on aura

$$mv = m'v';$$

ce qui fait voir que les vitesses imprimées par des forces égales à des masses différentes, sont en raison inverse de ces masses.

Il résulte encore de la proportionnalité des forces aux produits des masses par les vitesses, que si l'on fait $f' = 1$, $m' = 1$ et $v' = 1$, on aura la formule

$$f = mv;$$

c'est-à-dire que l'intensité, ou l'énergie de la force f, a pour mesure le produit de la masse m, sur laquelle cette force agit, par la vitesse v qu'elle lui imprime.

203. Le produit mv, de la masse d'un corps par sa vitesse, se nomme *quantité de mouvement;* on a donné un nom à ce produit, parce qu'il est souvent employé dans diverses questions de mécanique.

Soit f une force continue, appliquée à un corps solide homogène on hétérogène, de forme quelconque, dont la masse

50

est m. Cette masse peut être considérée comme l'agrégation de toutes les particules matérielles dont elle est composée; ces particules décrivent toutes, avec un mouvement commun imprimé par autant de forces égales, dont f est la résultante, des droites parallèles.

Désignons par φ la force qui agit sur l'unité de masse; la vitesse étant la même, les forces f et φ seront entre elles comme les masses, ou comme $m : 1$, ce qui donnera

$$f = m\varphi.$$

La force φ se nomme *force accélératrice*, et l'on désigne par le nom de *force motrice* le produit $m\varphi$ de la force accélératrice par la masse du mobile.

Dans les mouvements variés, la force accélératrice est en général une force variable, comme on le verra dans le paragraphe suivant; mais nous considérerons seulement ici le cas de la pesanteur, ou de la gravité, qui est une force accélératrice constante, près de la surface de la terre, parce que dans chaque unité de temps, ou dans chaque seconde, elle imprime aux mobiles soumis librement à son action un accroissement de vitesse $g = 9^{m},8089$. En mettant g à la place de φ, la formule précédente devient

$$f = mg.$$

Le produit mg de la masse d'un corps par la force accélératrice due à la pesanteur, exprime le poids de ce corps; ce poids en mouvement est une force motrice.

Si le corps est en repos, qu'il soit, par exemple, posé sur une table horizontale, ou suspendu à un point fixe par une corde ou une chaîne, dans cette disposition, l'effet de la pe-

santeur se réduit à une simple tendance au mouvement, et la force se nomme *force de pression*, ou *force morte*.

204. On appelle *force mouvante*, ou *quantité d'action*, l'effet produit par une force appliquée à une machine, pour élever un poids, vaincre une résistance, ou exécuter les mouvements qui conviennent à un travail quelconque; s'il s'agit, par exemple, d'un poids élevé à une certaine hauteur, on pourra prendre, pour mesure de la quantité d'action, le produit de ce poids par la ligne verticale qui marque la hauteur à laquelle il est élevé.

Si le poids p est élevé à la hauteur h, le produit ph sera l'expression de l'effet produit par la force mouvante, ou la mesure de la quantité d'action.

205. Soit m la masse du corps et g la force accélératrice due à la pesanteur, ou la vitesse gagnée pendant l'unité de temps, on aura

$$p = mg, \quad ph = mgh.$$

La vitesse acquise par un corps qui tombe de la hauteur h est exprimée par l'équation

$$v^2 = 2gh, \quad \frac{1}{2}v^2 = gh;$$

substituant $\frac{1}{2}v^2$ à la place de gh, on aura la formule

$$ph = \frac{1}{2}mv^2.$$

Le produit mv^2 de la masse d'un corps par le carré de sa vitesse s'appelle *force vive;* on en fait souvent usage dans la résolution des problèmes qui ont pour objet le calcul des machines en mouvement.

La mesure des forces a été l'objet d'une controverse très animée parmi les géomètres qui ont cultivé la philosophie naturelle, et qui sont parvenus, par leurs découvertes, à donner une grande extension à la science du mouvement. Dans tous leurs calculs relatifs aux corps en mouvement, le produit de la masse du corps par sa vitesse était pris pour la mesure de la force; Leibnitz annonça, en 1686, que l'on devait prendre, pour cette mesure, le produit de la masse par le carré de la vitesse, qu'il nomma *force vive;* les opinions se partagèrent, on s'est disputé pendant plus d'un demi-siècle sur cette question : on a fini par l'abandonner, parce qu'on a reconnu que, quelle que soit celle de ces deux mesures que l'on adopte, si l'on raisonne conséquemment aux principes bien établis, on obtient le même résultat, et c'est ce qui est toujours arrivé aux savants qui étaient d'avis contraire; mais chacun voulait faire prévaloir son opinion.

206. Le théorème de la composition des forces a été démontré, dans la Statique, indépendamment des vitesses, pour se conformer à la rigueur géométrique, qui prescrit de n'employer aucune notion dont le principe soit étranger à l'objet dont on s'occupe.

On peut aussi démontrer le théorème de la composition des mouvements, qui est le même que celui de la composition des forces, en employant la considération des vitesses, ce qui rendra la démonstration beaucoup plus simple que celle qui est fondée sur la notion des forces; d'ailleurs c'est ramener ce théorème vers son origine, car on en avait fait usage pour composer les mouvements, ou les vitesses, longtemps avant que Varignon n'ait eu l'idée de l'appliquer aux forces, et d'en déduire les lois de leur équilibre, et les conditions d'équilibre dans les machines simples.

Soit A (*fig.* 120) le point de départ d'un mobile, soumis à l'action simultanée de deux forces qui le tirent, ou qui le poussent, l'une suivant la direction AB, avec une vitesse uniforme, et l'autre suivant la direction AC, avec une vitesse égale à celle de la première force.

Lorsque les deux forces qui transportent le mobile auront parcouru les distances AB, AC, suivant leurs directions respectives, le mobile sera à l'extrémité D de la diagonale du parallélogramme dont AB et AC sont les côtés. En effet, on peut supposer que le mobile soit placé sur une règle AC, de sorte que l'action de la force dirigée suivant AB transporte cette règle, parallèlement à elle-même, et que dans le même temps, la force qui agit sur le mobile, suivant AC, lui fasse parcourir la longueur AC de cette même règle; lorsqu'elle est parvenue à la position BD, il est évident que le point C, où se trouve le mobile, coïncide avec le point D, à l'extrémité de la diagonale AD.

En prenant sur les directions des forces, des parties quelconques de même longueur, $Ab = Ac$, on prouvera de la même manière que lorsque les forces sont aux points b et c de leurs directions, le mobile est à l'extrémité d de la diagonale du parallélogramme A*bdc*; mais les parallélogrammes A*bdc*, ABDC, étant semblables, leurs diagonales sont sur la même ligne droite; donc les forces qui agissent sur le mobile, suivant les directions AB, AC, font parcourir à ce mobile la diagonale AD du parallélogramme que l'on appelle *parallélogramme des forces*, parce que ses côtés sont les lignes que l'on prend pour représenter les forces, ou leurs vitesses.

Cette proposition est vraie pour des vitesses uniformes, quel que soit leur rapport, et pour des vitesses accélérées ou

retardées, pourvu que les changements qui ont lieu dans les vitesses soient dans la même proportion.

Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la composition des vitesses pourra s'effectuer par des procédés semblables à ceux qui ont été employés dans la Statique pour la composition des forces.

Formules générales du mouvement varié.

207. Nous avons obtenu, par des considérations fondées sur les principes de la Géométrie élémentaire et de l'Algèbre, les formules qui nous ont servi à résoudre quelques-uns des principaux problèmes sur le mouvement uniforme et sur le mouvement uniformément varié; nous allons maintenant reprendre la théorie du mouvement varié, en y appliquant les principes de l'analyse infinitésimale, d'où l'on tire, d'une manière directe et facile, les formules du mouvement uniformément varié, et celles du mouvement varié d'une manière quelconque, dont on a souvent besoin pour résoudre des problèmes très importants de mécanique et de physique, auxquels les méthodes ordinaires ne sont pas applicables.

Reprenons l'équation, ou la formule générale du mouvement uniforme d'un mobile

$$x = e + vt;$$

on distingue, dans cette formule, des quantités de deux espèces: l'espace x parcouru par le mobile, et le temps t pendant lequel on observe son mouvement, sont deux quantités variables; les autres quantités e et v sont des quantités constantes. Ainsi le mouvement uniforme d'un mobile a pour expression algébrique une équation indéterminée du pre-



mier degré, que l'on peut construire géométriquement de la manière suivante, d'après les principes de la géométrie analytique.

Menons deux axes rectangulaires AX, AY (*fig.* 121), et cherchons les points où ces axes sont coupés par la ligne droite qui a pour équation $x = e + vt$.

Nous supposerons que l'on connait les valeurs des deux quantités constantes e et v; si l'on fait $t = 0$, on aura $x = e = \text{AD}$; en faisant $x = 0$, l'équation devient $0 = e + vt$, d'où l'on tire $t = -\frac{e}{v} = -\text{AC}$. Menons une ligne droite par les points C et D, que nous venons de déterminer sur les axes; cette droite sera la ligne représentée par l'équation du mouvement uniforme, ou le lieu géométrique des espaces parcourus par le mobile. En effet, si d'un point quelconque N, pris sur cette droite, on abaisse une perpendiculaire, ou une ordonnée NM sur l'axe AX, l'abscisse correspondante DM sera l'espace parcouru par le mobile pendant le temps représenté par l'ordonnée NM.

Le triangle rectangle DMN donne tang DNM $= \frac{\text{DM}}{\text{MN}}$; en observant que tang DNM $= v$, MN $= t$, AD $= e$ et DM $= x - e$, on retrouve

$$v = \frac{x - e}{t}.$$

Par un point n, pris sur le prolongement de la droite CN, à une très petite distance du point N, abaissons l'ordonnée nm, et menons [illegible] parallèle [illegible] AX; les deux triangles rectangles [illegible] pn, [illegible] à la place du rapport [illegible] lés [illegible] peut substituer cel[illegible]

triangle $\frac{Np}{pn}$; d'ailleurs $Np = dx$ et $pn = dt$: ainsi l'on a

$$v = \frac{dx}{dt};$$

c'est-à-dire que l'expression différentielle de la vitesse d'un mobile est le quotient de la différentielle de l'espace parcouru divisée par la différentielle du temps.

Cette formule différentielle n'est pas seulement l'expression de la vitesse dans le mouvement uniforme, elle exprime généralement la vitesse, quelle que soit la force par laquelle le mouvement est produit; si c'est une force continue, elle produira un mouvement varié. Supposons que ce mouvement soit accéléré, nous pouvons le considérer comme étant produit par une suite d'impulsions qui se succèdent à des intervalles égaux infiniment petits. Pendant l'un de ces intervalles de temps dt, le mobile parcourra l'espace infiniment petit dx, et son mouvement sera uniforme jusqu'à l'impulsion suivante, qui lui communiquera un accroissement de vitesse: la formule précédente sera donc l'expression de la vitesse du mobile pendant l'un quelconque des instants infiniment petits de son mouvement. On prouverait par un raisonnement semblable qu'elle exprime aussi la vitesse du mobile lorsque son mouvement est retardé.

Le mouvement le plus simple, après le mouvement uniforme, est le mouvement uniformément accéléré, produit par l'action de la pesanteur sur les corps qui tombent librement près de la surface de la terre. Au bout d'un temps quelconque, la vitesse est exprimée par la formule

$$v = a + gt,$$

dans laquelle a représente la vitesse du mobile lorsqu'on a commencé à compter le temps, et g désigne l'accroissement de la vitesse produit par les impulsions qu'il reçoit de la pesanteur, pendant chaque seconde, ou chaque unité de temps.

Cette valeur de la vitesse v est égale à celle de la formule précédente, ce qui donne

$$\frac{dx}{dt} = a + gt, \quad dx = adt + gtdt;$$

en intégrant, et désignant la constante par b, on aura

$$x = b + at + \frac{1}{2}gt^2.$$

Si le mobile n'a aucune vitesse initiale, les deux constantes a et b seront nulles, ce qui réduit les formules générales du mouvement uniformément varié à celles que nous avons déjà trouvées (191),

$$v = gt, \quad x = \frac{1}{2}gt^2;$$

d'où l'on tire

$$g = \frac{v}{t}, \quad g = \frac{2x}{t^2}.$$

Ce qui fait voir que g, ou la force accélératrice due à la pesanteur, a pour valeur le quotient de la vitesse acquise au bout du temps t divisée par ce temps, ou bien le double de l'espace parcouru divisé par le carré de ce même temps.

Nous allons maintenant nous occuper de la recherche des formules du mouvement varié d'une manière quelconque.

208. Désignons par φ la force qui agit sur le mobile, et

qui lui communique un mouvement varié que nous supposerons accéléré; pour déterminer la valeur de cette force, nous supposerons qu'au bout du temps t elle devient constante, et nous chercherons l'effet qu'elle peut produire immédiatement après le temps t, pendant une seconde, ou une unité de temps.

Soit v la vitesse acquise par le mobile à la fin du temps t; après le temps $t+dt$, la vitesse sera $v+dv$, et par conséquent la force φ, devenue constante, imprimera au mobile une vitesse dv pendant chaque instant dt; donc pendant l'unité de temps, ou pendant $1''$, la vitesse imprimée au mobile sera le produit de dv par le nombre de fois que dt est contenu dans $1''$, ou $\frac{1''}{dt} \times dv$, ce qui donne

$$\varphi = \frac{dv}{dt}, \quad dv = \varphi dt.$$

Cette valeur de φ est analogue à celle que nous avons trouvée pour la valeur de g, dans le mouvement uniformément varié; elle en diffère en ce que g a pour valeur le quotient de deux quantités finies, et que c'est par le quotient des différentielles de ces mêmes quantités que la valeur de φ est exprimée.

La formule que nous venons de trouver peut être combinée avec la formule

$$v = \frac{dx}{dt},$$

qui est, comme nous l'avons observé (207), l'expression de la vitesse dans toute espèce de mouvement.

Différentions cette dernière formule, en regardant dt comme constant, nous aurons $dv = \frac{d^2x}{dt}$; en substituant cette

valeur de dv dans la formule précédente, elle devient

$$\frac{d^2x}{dt} = \varphi dt, \quad \varphi = \frac{d^2x}{dt^2};$$

en éliminant dt entre les mêmes formules, on aura

$$\varphi = \frac{vdv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d.v^2}{dx}.$$

209. Dans les formules précédentes, le mobile est supposé réduit à un point matériel, ou à l'unité de masse; en désignant par f la force qui agit sur un mobile dont la masse est représentée par m, la mesure de cette force sera exprimée par la formule

$$f = m\varphi, \quad \text{ou} \quad f = m.\frac{dv}{dt}.$$

Le produit $m\varphi$ se nomme *force motrice*, et l'on appelle *force accélératrice* la force φ, qui agit sur l'unité de masse; c'est le quotient de la force motrice divisée par la masse du corps, ou du mobile auquel la force est appliquée.

Ces formules sont souvent employées dans la Mécanique analytique; on concevra leur utilité par l'application que nous en allons faire pour la résolution des problèmes suivants, qui sont la suite de ceux dont nous nous sommes déjà occupés sur le mouvement uniformément varié.

Trouver le temps t *de la chute verticale d'un corps, la vitesse acquise et l'espace parcouru au bout de ce temps, en ayant égard à la résistance de l'air.* — Le corps, ou le mobile, peut être considéré comme un assemblage de particules, ou de points matériels, et dans la chute, la pesanteur imprime une vitesse commune à chacun de ces points, qui décrit une verticale comme s'il était isolé.

La résistance de l'air est une force retardatrice qui agit sur la surface du mobile, dans une direction opposée à celle qui lui est imprimée par la pesanteur.

Cette résistance est peut-être encore bien loin d'être éclaircie d'une manière satisfaisante, quoiqu'elle ait été l'objet de beaucoup de recherches; les expériences qui ont été faites pour déterminer sa valeur ne présentent pas, dans leurs résultats, l'uniformité qui serait nécessaire pour servir de fondement à une théorie générale; cependant elles s'accordent pour prouver que, les petites vitesses et les vitesses très grandes exceptées, en supposant l'air partout d'une même densité, il oppose au mobile qui le traverse une résistance sensiblement proportionnelle au carré de sa vitesse.

Désignons par v la vitesse du mobile, et par k un coefficient qui devra être déterminé par l'expérience; la force accélératrice sera exprimée par l'équation

$$\varphi = g - kv^2.$$

Il faut d'abord remplacer φ par sa valeur $\frac{dv}{dt}$; on peut aussi, pour établir l'homogénéité des termes et simplifier les calculs, faire $k = \frac{g}{a^2}$; d'après ces substitutions, on aura l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv^2}{a^2} = g \cdot \frac{a^2 - v^2}{a^2},$$

$$gdt = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = \frac{a^2 dv}{(a+v)(a-v)},$$

dont l'intégrale

$$gt = a^2 \int \frac{dv}{(a+v)(a-v)}.$$

Pour effectuer l'intégration indiquée, nous décomposerons la fraction différentielle en deux autres fractions.

Désignons par A et B les numérateurs des fractions partielles, nous aurons

$$\frac{dv}{a^2-v^2}=dv\left(\frac{A}{a+v}+\frac{B}{a-v}\right);$$

en supprimant le facteur commun dv, réduisant au même dénominateur, et faisant passer tous les termes dans un seul membre, il viendra

$$(A-B)v-(A+B)a+1=0.$$

Les deux parties de ce polynome, dont l'une contient la variable v, et l'autre ne renferme que des quantités constantes, doivent être nulles séparément, ce qui donne

$$A=B,\quad -2Aa+1=0,\quad A=\frac{1}{2a},$$
$$\frac{dv}{(a+v)(a-v)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{dv}{a+v}+\frac{dv}{a-v}\right);$$

et l'équation du problème devient

$$gt=\frac{a}{2}\int\left(\frac{dv}{a+v}+\frac{dv}{a-v}\right).$$

Le second membre s'intègre par les logarithmes, et l'on a

$$gt=\frac{a}{2}[\log(a+v)-\log(a-v)]$$
$$\frac{2gt}{a}=\log\frac{a+v}{a-v};$$

on n'ajoute point de constante, parce que les variables t et v sont nulles en même temps.

Lorsque la vitesse v, acquise par le mobile, sera donnée,

on calculera le temps de la chute par la formule que nous venons de trouver.

Les logarithmes indiqués dans cette formule sont des logarithmes népériens; on désigne par la lettre e le nombre 2,718 2818.... qui forme la base de ces logarithmes.

Dans tout système de logarithmes, le logarithme de la base est l'unité, et par conséquent on a $\log e = 1$; en multipliant la formule précédente par celle-ci, et observant que $m \log e = \log e^m$, on aura

$$\frac{2gt}{a}\log e = \log\frac{a+v}{a-v}, \quad e^{\frac{2gt}{a}} = \frac{a+v}{a-v}.$$

En résolvant cette dernière équation par rapport à v, on trouvera

$$v = \frac{a\left(e^{\frac{2gt}{a}}-1\right)}{e^{\frac{2gt}{a}}+1} = a\left(1-\frac{2}{e^{\frac{2gt}{a}}+1}\right);$$

à mesure que le temps t augmente, la fraction $\frac{2}{e^{\frac{2gt}{a}}+1}$ diminue, et la valeur de la vitesse v approche de celle de a, c'est-à-dire qu'elle tend à devenir uniforme; cependant, quoiqu'elle n'en diffère pas beaucoup, après un temps peu considérable, elle ne peut atteindre rigoureusement l'uniformité qu'au bout d'un temps infini.

210. Pour chercher la relation entre l'espace parcouru et la vitesse acquise, ou l'espace x en fonction de cette vitesse, nous reprendrons les deux formules

$$dx = vdt, \quad \frac{dv}{dt} = g\cdot\frac{a^2-v^2}{a^2}.$$

En substituant, dans la seconde formule, la valeur de dt prise dans la première, on aura

$$gdx = a^2 \cdot \frac{vdv}{a^2 - v^2}.$$

La fraction du second membre est de la forme d'une différentielle logarithmique, puisque le numérateur de cette fraction est la différentielle de son dénominateur, à une constante près; pour en trouver l'intégrale, nous ferons

$$a^2 - v^2 = z, \quad vdv = -\frac{dz}{2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans la formule précédente, elle devient

$$gdx = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{dz}{z},$$

et son intégrale

$$gx = \mathrm{C} - \frac{a^2}{2} \log z;$$

en remettant la valeur de z, on aura

$$gx = \mathrm{C} - \frac{a^2}{2} \log (a^2 - v^2).$$

Nous déterminerons la valeur de la constante C, en observant qu'on a en même temps $x = 0$ et $v = 0$, ce qui donne

$$0 = \mathrm{C} - \frac{a^2}{2} \log a^2, \quad \mathrm{C} = \frac{a^2}{2} \log a^2,$$

et par conséquent nous aurons l'intégrale complète

$$gx = \frac{a^2}{2} [\log a^2 - \log (a^2 - v^2)],$$

$$x = \frac{a^2}{2g} \log \frac{a^2}{a^2 - v^2}$$

La valeur que nous avons trouvée pour la vitesse v étant élevée au carré, en la substituant dans cette formule, et effectuant les réductions, on obtiendra la formule suivante :

$$x = \frac{a^2}{g} \log \frac{e^{\frac{2gt}{a}} + 1}{2e^{\frac{gt}{a}}} = \frac{a^2}{g} \log \frac{e^{\frac{gt}{a}} + e^{\frac{-gt}{a}}}{2}.$$

Cette formule servira pour calculer la hauteur de la chute, lorsque le temps sera connu.

On trouverait, par des opérations à peu près semblables à celles qui précèdent, les formules du mouvement d'ascension d'un mobile, lancé verticalement dans l'air.

211. Les formules que nous venons de trouver doivent reproduire, comme cas particuliers, celles de la chute verticale des corps dans le vide, ou dans un milieu dont la résistance est insensible, ce qui a lieu lorsque $a = \infty$; nous allons nous occuper de cette recherche, et pour éviter les transformations indirectes qu'elle exigerait, en employant les formules finales que nous avons obtenues, nous reprendrons les équations différentielles

$$gdt = dv . \frac{a^2}{a^2 - v^2}, \quad gdx = vdv . \frac{a^2}{a^2 - v^2};$$

la quantité fractionnaire $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$ peut être développée par la division, ou bien par la formule du binome, ce qui donnera la série

$$\frac{a^2}{a^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{a^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{v^2}{a^2} + \frac{v^4}{a^4} + \frac{v^6}{a^6} + \text{etc.}$$

En mettant les premiers termes de cette série dans chaque

formule différentielle, on aura

$$gdt = dv + \frac{v^2dv}{a^2} + \frac{v^4dv}{a^4} + \frac{v^6dv}{a^6} + \text{etc.},$$

$$gdx = vdv + \frac{v^3dv}{a^2} + \frac{v^5dv}{a^4} + \frac{v^7dv}{a^6} + \text{etc.};$$

ces deux formules étant intégrées, elles deviennent

$$gt = v + \frac{v^3}{3a^2} + \frac{v^5}{5a^4} + \frac{v^7}{7a^6} + \text{etc.},$$

$$gx = \frac{1}{2}v^2 + \frac{v^4}{4a^2} + \frac{v^6}{6a^4} + \frac{v^8}{8a^6} + \text{etc.}$$

Si l'on suppose $a = \infty$, c'est-à-dire que la quantité représentée par a soit infiniment grande, tous les termes dont le dénominateur renferme cette quantité seront des fractions infiniment petites que l'on pourra négliger; alors chaque série étant réduite à son premier terme, on aura seulement

$$v = gt, \quad v^2 = 2gx:$$

ce sont les deux formules qui expriment les lois de la chute verticale des corps pesants dans le vide, à des distances peu au-dessus de la surface de la terre.

212. Nous avons représenté par a une quantité qui reste indéterminée dans les formules du problème que nous venons de résoudre; nous allons chercher l'expression de sa valeur.

La résistance de l'air, comme nous l'avons déjà observé, est une force directement opposée à la force motrice produite par la pesanteur; on suppose que la première de ces forces est proportionnelle à la densité D' du fluide, à la surface S du mobile et au carré v^2 de sa vitesse; en la divisant par la

masse m du mobile, on aura $\frac{SD'v^2}{m}$. Nous avons déjà représenté l'intensité de cette force par $\frac{gv^2}{a^2}$, ce qui donne l'équation

$$\frac{g}{a^2} = \frac{SD'}{m}.$$

Pour faciliter les calculs, nous prendrons un mobile sphérique; désignons par r son rayon et par D sa densité.

La résistance sur la sphère entière est seulement la moitié de celle qu'éprouverait un de ses grands cercles; π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, nous aurons $S = \frac{1}{2}\pi r^2$.

Le volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi r^3$, et sa masse $m = \frac{4}{3}\pi r^3 D$; en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura

$$\frac{g}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 D'}{\frac{4}{3}\pi r^3 D} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{D'}{D}.$$

Cette formule doit encore être modifiée par les considérations suivantes.

On a représenté par g la force accélératrice due à la pesanteur dans le vide; cette force doit être réduite à $g - g \times \frac{D'}{D}$, ou $g\left(1 - \frac{D'}{D}\right)$, lorsque le mobile tombe verticalement dans l'air.

D'après les résultats que Newton a trouvés dans ses recherches sur ce sujet, il a conclu que la résistance de l'air n'est que la moitié de celle qu'indique la théorie précédente.

Ces deux conditions étant introduites dans l'équation pré-

cédente, elle devient

$$\frac{g\left(1-\frac{D'}{D}\right)}{a^2}=\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{D'}{D},\quad \frac{a^2}{g}=\frac{16}{3}\left(1-\frac{D'}{D}\right)r\frac{D}{D'},$$
$$a^2=\frac{16}{3}r\left(\frac{D}{D'}-1\right)g.$$

On doit à Newton la théorie sur laquelle sont fondées les formules précédentes; elle est développée dans le deuxième livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, d'après la méthode synthétique que l'auteur avait adoptée pour exposer ses découvertes. Il a ajouté, dans la troisième édition, publiée en 1726, plusieurs séries d'expériences qu'il avait faites en juin 1710, pour vérifier cette théorie, et d'autres expériences semblables, qui ont été faites dans le même lieu par Désagulier, en juillet 1719.

Nous allons prendre la première expérience de Newton, pour donner un exemple de l'application des formules que nous venons de trouver.

Les mobiles étaient des sphères de verre, dont l'intérieur était rempli d'air; Newton les faisait tomber du haut de l'église Saint-Paul, à Londres: la hauteur de la chute était de 220 pieds anglais.

La sphère qu'on laissa tomber, dans la première expérience, pesait 510 grains; son diamètre était de 5,1 pouces, et le temps de sa chute fut de 8,2 secondes.

Nous emploierons les mesures anglaises dans les calculs de cette expérience.

Le rayon de la sphère est de $2^{po},55$; son volume est de

$$\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times 3,1416\times \overline{2,55}^3=69,45 \text{ pouces cubes.}$$

Un pouce cube d'eau pèse 252,5 grains : par conséquent le poids d'un volume d'eau égal à celui de la sphère sera de

$$252,5 \times 69,45 = 17536 \text{ grains.}$$

Le rapport des poids d'un volume d'eau et d'un égal volume d'air est de 812; ainsi un volume d'air égal à celui de la sphère pèsera

$$\frac{17536}{812} = 21^{\text{gr}},59.$$

Poids de la sphère dans l'air.	510,00 grains
poids du volume d'air qu'elle déplace. .	21,59
La sphère pèse dans le vide.	531,59 grains.

Le rapport des densités étant égal à celui des poids, on aura

$$\frac{D}{D'} - 1 = \frac{531,59}{21,59} - 1 = 23,622.$$

Puisque les calculs sont faits en mesures anglaises, afin de comparer directement le résultat du calcul à celui de l'expérience, il faut observer qu'à Londres la pesanteur $g = 32^{\text{pi}} = 384$ pouces.

En substituant à la place des lettres D, D′ et g, les nombres que nous venons de trouver, la dernière formule devient

$$a^2 = \frac{16}{3} \times 2,55 \times 23,622 \times 384.$$

Il serait facile d'effectuer ces calculs par les méthodes ordinaires, mais il est préférable d'employer les tables de lo-

garithmes.

log 16.............	1.2041200
log 2,55...........	0.4065402
log 23,622.........	1.3733167
log 384............	2.5843312
c. log 3..............	9.5228787
log a^2.............	15.0911868

$$a^2 = 123363,5,$$

ce qui donne

$$\frac{a^2}{g} = 321,26;$$

en prenant ensuite la moitié du logarithme de a^2 et cherchant le nombre qui lui correspond, on aura

$$\log a \ldots . 2.5455934, \quad a = 351,2314.$$

213. Pour trouver l'espace parcouru par le mobile, ou la hauteur théorique de la chute, il faut substituer les valeurs des lettres dans la formule

$$x = \frac{a^2}{g} \log \frac{e^{\frac{gt}{a}} + e^{\frac{-gt}{a}}}{2};$$

le terme $e^{\frac{-gt}{a}} = \frac{1}{e^{\frac{gt}{a}}}$ est une petite fraction que l'on peut négliger, et la formule devient

$$x = \frac{a^2}{g} \log \frac{e^{\frac{gt}{a}}}{2} = at - \frac{a^2}{g} \log 2.$$

Évaluons le logarithme népérien par le moyen du logarithme

vulgaire correspondant; nous aurons

$$\text{Log } 2 = \log 2 \times 2{,}302585 = 0{,}30103 \times 2{,}302585 = 0{,}69315.$$

Les valeurs des lettres étant connues, en les substituant dans la formule et effectuant les calculs, on aura

$$x = 351{,}2314 \times 8{,}2 - 321{,}26 \times 0{,}69315 = 2657{,}42 \text{ pouces}, \\ = 221{,}45 \text{ pieds}.$$

Newton a trouvé 226 pieds; l'excès de 5 pieds, sur le résultat que nous trouvons, provient principalement du rapport du poids d'un volume d'eau à celui d'un volume égal d'air, qui était supposé de 850 par Newton et plusieurs autres géomètres qui ont appliqué l'analyse à sa théorie, au lieu de 812 que nous avons pris pour ce rapport, d'après les expériences de Lavoisier.

Si la chute avait lieu dans le vide, la hauteur de 220 pieds serait parcourue par le mobile en $3'',7$, ce qui fait voir que, pour cette hauteur, la résistance de l'air augmente de plus du double le temps de la chute du mobile.

214. *Déterminer les lois du mouvement dans la chute verticale des corps, en considérant la pesanteur comme une force qui varie en raison inverse du carré des distances.*

Nous avons supposé que la pesanteur est une force constante, et que le mouvement qu'elle imprime aux corps est un mouvement uniformément accéléré; quoique cette supposition ne s'écarte pas sensiblement de la vérité, dans la limite des lieux auxquels nous pouvons nous élever, elle n'est cependant pas d'une exactitude rigoureuse. Newton est parvenu à découvrir que l'intensité de la pesanteur varie en raison inverse du carré des distances au centre de la terre; nous

allons chercher les formules qu'il faudrait employer, d'après cette loi, pour résoudre les problèmes sur la chute des corps.

Soit A (*fig.* 122) le point de départ du mobile; désignons par a la distance AC de ce point au centre de la terre, dont nous représenterons le rayon CB par r.

Au bout du temps t, le mobile aura parcouru la distance verticale $x = \text{AD}$, il est sollicité par la force accélératrice φ, dont l'intensité est à celle de la pesanteur g, près de la surface de la terre, ou au niveau de la mer, en raison inverse des carrés de leurs distances $a - x$ et r, au centre C de la terre; cette condition donne

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{r^2}{(a-x)^2}, \quad \varphi = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

La force accélératrice φ étant remplacée par sa valeur $\frac{dv}{dt}$, cette équation devient

$$dv = \frac{gr^2 dt}{(a-x)^2};$$

substituant, à la place de dt, sa valeur prise dans l'équation $v = \frac{dx}{dt}$, il viendra

$$vdv = gr^2 \frac{dx}{(a-x)^2};$$

en intégrant, on aura

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gr^2}{a-x} + \text{C}.$$

On déterminera la constante C, en observant qu'à l'origine du mouvement on a $v = 0$, $x = 0$; par conséquent

$$0 = \frac{gr^2}{a} + \text{C}, \quad \text{C} = -\frac{gr^2}{a},$$

et l'intégrale complète devient

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a-x} - \frac{2gr^2}{a} = \frac{2gr^2x}{a(a-x)}.$$

215. Lorsque le mobile est descendu sur la surface de la terre, ou au niveau de la mer, on a $a - x = r$, et la vitesse acquise

$$v = \sqrt{\frac{r}{a} \cdot 2gx};$$

en considérant la pesanteur comme une force constante, nous avons trouvé (**192**) que cette vitesse est exprimée par la formule $v = \sqrt{2gx}$; la première de ces formules donnerait, pour la vitesse v, une valeur moindre que la seconde, mais la différence est si petite, qu'elle peut être négligée dans toutes les applications ordinaires.

Pour chercher la relation entre le temps et l'espace parcouru par le mobile, nous remplacerons la vitesse v par sa valeur $\frac{dx}{dt}$, et l'équation deviendra

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gr^2x}{a(a-x)}}, \quad \left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rdt = \left(\frac{a-x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx;$$

multipliant le second membre par $\left(\frac{a-x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$, cette équation devient

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rdt = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{(\frac{1}{2}a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

En intégrant, on aura

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \sqrt{ax-x^2} + \frac{1}{2}a\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

La quantité qui reste à intégrer peut être ramenée à la forme d'une différentielle circulaire. En faisant $x = \frac{1}{2}a - z$, cette quantité devient

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{-dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{\frac{1}{4}a^2}\right)\frac{1}{4}a^2}},$$

et son intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int \frac{-\frac{2}{a}dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{2z}{a}\right)^2}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{2z}{a}\right);$$

remettant cette intégrale, dans laquelle on remplacera la lettre z par sa valeur $\frac{1}{2}a - x$, la relation entre le temps et l'espace parcouru sera exprimée par la formule

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{2}a.\text{arc}\left(\cos = \frac{a - 2x}{a}\right);$$

on n'ajoute point de constante, parce qu'on a en même temps $t = 0$ et $x = 0$, ce qui fait disparaître tous les termes.

L'intégrale que nous venons de trouver peut être exprimée géométriquement d'après la construction suivante.

Si du point O, milieu de AC, et avec le rayon OA, on décrit le demi-cercle AMC, et que l'on mène l'ordonnée DM, on aura

$$\text{DM} = \sqrt{\text{AD} \times \text{DC}} = \sqrt{x(a - x)};$$

$\text{arc}\left(\cos \frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a}\right)$ est l'arc α du cercle dont le rayon est l'unité, et le produit de cet arc par le rayon $\frac{1}{2}a$ représente la me-

sure de l'arc AM; ainsi l'on a

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \text{DM} + \text{arc AM}.$$

La formule générale peut être modifiée de manière qu'elle reproduise celle que nous avons obtenue, en considérant la pesanteur comme une force constante.

On a

$$\text{arc}\left(\cos = \frac{a-2x}{a}\right) = \text{arc}\left[\sin = \sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}\right] = \text{arc}\left(\sin = \frac{2\sqrt{ax-x^2}}{a}\right);$$

en substituant le sinus à la place du cosinus, la formule devient

$$\left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \sqrt{ax-x^2} + \tfrac{1}{2}a.\text{arc}\left(\sin = \frac{2\sqrt{ax-x^2}}{a}\right).$$

Le sinus étant très petit, on peut le prendre à la place de l'arc; alors le second terme de la formule sera égal au premier. Si l'on met r à la place de a, dans le premier membre, et que l'on fasse $a-x=r$, la formule deviendra

$$\sqrt{2gr} \times t = 2\sqrt{rx}, \quad 2gt^2 = 4x;$$

d'où l'on tire

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2:$$

c'est la formule qui exprime la relation entre l'espace et le temps, dans le mouvement uniformément accéléré.

CHAPITRE IV.

PRINCIPE GÉNÉRAL DU MOUVEMENT, OU PRINCIPE DE D'ALEMBERT, D'APRÈS LEQUEL LES QUESTIONS DE DYNAMIQUE SE RÉDUISENT A DES QUESTIONS D'ÉQUILIBRE.

216. Dans les questions dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, pour déterminer le mouvement que des forces données peuvent imprimer à des mobiles, ou à des corps quelconques, nous n'avons considéré que des corps isolés, que nous pouvions même supposer concentrés à leurs centres de gravité, et ne formant que de simples points matériels; les règles que nous avons employées sont insuffisantes lorsque le mouvemeut est produit par des forces qui agissent sur différents points d'un corps solide, ou sur différents corps qui forment un système, parce qu'ils sont liés entre eux, soit par des tiges rigides et inflexibles, soit par des cordes inextensibles; d'où il résulte que la vitesse imprimée à chaque partie, et qui aurait lieu si elle était détachée du corps ou du système auquel elle appartient, est altérée par suite de sa liaison avec les autres parties.

Les règles applicables aux cas que nous venons d'indiquer se déduisent d'un principe général du mouvement dont nous allons donner l'énoncé et l'explication, en l'appliquant à quelques exemples; il est connu sous le nom de *principe de d'Alembert*. Ce philosophe célèbre en a fait la base de son Traité de Dynamique, dont la première édition a été impri-

mée en 1743, et il s'en est servi pour résoudre des problèmes qui embarrassaient les plus habiles géomètres.

Si un corps, on un système de corps, est mis en mouvement par des forces appliquées à chacune de ses parties, la vitesse imprimée à chaque partie, et qui aurait lieu si elle était libre, sera la résultante de la vitesse de cette partie, dans le mouvement du système et de la vitesse qui est détruite par la résistance des autres parties.

Soit A (*fig.* 123) l'un des corps du système; désignons sa masse par m, et par v la vitesse que lui imprimerait, s'il était libre, la force dont il reçoit l'impulsion; appelons u la vitesse que les autres parties du système font perdre au corps A, et r la vitesse qui lui reste; la force appliquée à ce corps a pour mesure la quantité de mouvement mv, que nous représenterons par la ligne droite AP. Nous décomposerons, par la règle du parallélogramme des forces, cette quantité de mouvement en deux autres; l'une mu, représentée par la droite AN, sera la force perdue, et l'effet qui aura lieu sera produit par la force, ou la quantité de mouvement restante mr, représentée par la droite AM.

En appelant m', m'', etc., les masses des autres corps du système; v', v'', etc., les vitesses imprimées à ces corps; u', u'', etc., les pertes de vitesse qui ont lieu par suite de leur liaison avec les autres parties, et r', r'', etc., les vitesses qui leur restent, on aura les quantités de mouvement imprimées, ou les forces qui agissent sur les masses, $m'v'$, $m''v''$, etc.; les forces perdues seront $m'u'$, $m''u''$, etc.; et les forces $m'r'$, $m''r''$, etc., sont les composantes par lesquelles le système est mis en mouvement.

Les forces perdues mu, $m'u'$, $m''u''$, etc., doivent être telles que si elles étaient seules appliquées au corps, ou au sys-

tème, il resterait en équilibre; car si ces forces produisaient un changement dans le mouvement du système, ce mouvement ne serait pas produit exclusivement par les autres composantes, ce qui est contre l'hypothèse.

217. Le principe général du mouvement a lieu quelle que soit la nature des forces appliquées au corps ou au système de corps: ces forces peuvent être la gravité, dont l'action est continue, ou des forces qui agissent par des chocs dont la durée n'est pas appréciable.

Pour appliquer ce principe comme nous venons de le présenter, la décomposition des forces, ou des quantités de mouvement, qui est nécessaire, serait souvent embarrassante; on évite cette décomposition en modifiant l'énoncé d'après le procédé suivant.

La quantité de mouvement, ou la force perdue *mu*, qui est exprimée par la droite AN, peut être décomposée en deux autres forces; on prendra la force donnée AP pour l'une des composantes, et l'autre composante AM′ sera la force restante AM, prise avec un signe contraire; ainsi l'on aura la force, ou la vitesse perdue par le corps A, en retranchant de la vitesse imprimée à ce corps, qui est donnée, la vitesse qui lui reste. Le même raisonnement s'applique à toutes les forces qui agissent sur le système, ou bien à toutes les vitesses imprimées à ses diverses parties; on en déduit l'énoncé suivant.

Si de la somme de toutes les forces, ou de toutes les vitesses imprimées aux diverses parties d'un système, on retranche la vitesse avec laquelle ce système se meut, la différence exprimera la somme des vitesses perdues, ou absorbées par suite de la liaison des parties du système; ce qui revient à établir l'équilibre entre les forces données et les mouvements engendrés, pris en sens contraire.

Ce second énoncé du principe de d'Alembert est moins direct que le premier, mais il a l'avantage d'en rendre l'application plus facile, parce qu'il n'exige pas la décomposition des forces appliquées au système, et qu'il suffit de former l'équation d'équilibre entre ces forces et celles dont l'effet est produit; nous allons en donner quelques exemples.

Premier exemple. Trouver le mouvement de deux corps sur deux plans inclinés adossés de même hauteur, en faisant abstraction du frottement; ces deux corps étant liés entre eux par un fil inextensible, qui passe dans la gorge d'une poulie fixe, placée au sommet commun des deux plans inclinés.

Les deux corps M et M′ (*fig.* 113), placés chacun sur l'un des plans inclinés adossés, de même hauteur, sont liés entre eux par une corde, ou un fil flexible et inextensible, qui passe dans la gorge de la poulie fixe E; il s'agit de déterminer la vitesse de ces deux corps.

Nous désignerons les masses des corps M, M′, par m, m'; les longueurs CA, CA′, des plans inclinés, par l, l', et leur hauteur commune CB par h.

La pesanteur étant représentée par g, sa composante, ou la force accélératrice, sera $\frac{gh}{l}$ sur le plan CA, et $\frac{gh}{l'}$ sur le plan CA′ (194); au bout du temps t, la vitesse de la masse m étant représentée par u, et celle de la masse m' par u', après le temps $t+dt$, on a $u+du$ et $u'+du'$, pour les vitesses qui restent aux mobiles.

Pendant l'instant dt, les vitesses imprimées aux masses m, m', sur les plans CA, CA′, seraient $\frac{gh}{l}dt$, $\frac{gh}{l'}dt$, si les mobiles étaient libres; et par conséquent au bout du temps $t+dt$, on a, pour les expressions des vitesses imprimées aux

mobiles,

$$u + \frac{gh}{l}\,dt, \quad u' + \frac{gh}{l'}\,dt.$$

Si de la vitesse imprimée à chaque mobile, on retranche la vitesse qui lui reste, les différences

$$\frac{gh}{l}\,dt - du, \quad \frac{gh}{l'}\,dt - du',$$

seront les vitesses perdues.

Les quantités de mouvement qui correspondent à ces dernières vitesses doivent se faire équilibre, d'après le principe de d'Alembert; et comme elles agissent en sens contraire, puisque si l'une descend elle fait monter l'autre, il faut qu'elles soient égales, ce qui donne l'équation

$$m\left(\frac{gh}{l}\,dt - du\right) = m'\left(\frac{gh}{l'}\,dt - du'\right).$$

Les vitesses u et u' sont égales et de signe contraire : ainsi l'on a $du' = -du$; en substituant cette valeur de du', l'équation devient

$$m\left(\frac{gh}{l}\,dt - du\right) = m'\left(\frac{gh}{l'}\,dt + du\right),$$

d'où l'on tire

$$du = \frac{(ml' - m'l)h}{(m + m')ll'} \cdot g\,dt;$$

et en intégrant,

$$u = \frac{(ml' - m'l)h}{(m + m')ll'}\,gt.$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce que nous supposons que le mouvement a commencé lorsqu'on comptait $t = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y avait point de vitesse initiale.

Cette expression de la vitesse fait voir que le mouvement est un mouvement uniformément accéléré, moins rapide que celui de la chute verticale d'un corps abandonné à l'action de la pesanteur, dans le vide, parce que le facteur $\frac{(ml'-m'l)h}{(m+m')ll'}$ est une fraction plus petite que l'unité.

Deuxième exemple. Trouver les lois du mouvement produit par la pesanteur sur deux corps, ou deux poids, attachés chacun à l'un des bouts d'une corde, ou d'un fil flexible et inextensible, qui passe dans la gorge d'une poulie fixe.

Soient les deux corps P, P', attachés aux deux bouts de la corde qui passe sur la poulie BED (*fig.* 124), dont l'essieu C est horizontal; désignons par m la masse du corps P, et par m' celle du corps P'; représentons par u, u', les vitesses acquises par les deux corps pendant le temps t; au bout du temps $t+dt$, ces vitesses seront exprimées par $u+du$, $u'+du'$.

En supposant les deux corps abandonnés à l'action de la pesanteur g, pendant l'instant dt, elle imprimera à chacun d'eux la vitesse gdt, et au bout du temps $t+dt$, on aura, pour les vitesses imprimées à ces corps,

$$u+gdt, \quad u'+gdt;$$

retranchant les vitesses effectives $u+du$, $u'+du'$, et observant que, d'après la disposition du système, les vitesses u, u', sont égales et de signe contraire, il restera

$$gdt-du, \quad gdt+du.$$

Ces restes sont les vitesses perdues, et les quantités de mouvement correspondantes qui sont proportionnelles à ces vi-

tesses, ou les forces perdues, doivent se faire équilibre, d'après le principe général de Dynamique; d'ailleurs ces deux forces sont opposées, puisque la descente de l'une fait monter l'autre; donc elles doivent être égales, et l'on a l'équation

$$m(gdt - du) = m'(gdt + du),$$

d'où l'on tire

$$du = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot gdt;$$

en prenant l'intégrale, et supposant qu'on a en même temps $t = 0$ et $v = 0$, il viendra

$$u = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot gt.$$

Cette formule pouvait se déduire de celle que nous avons obtenue pour la solution du problème précédent; en effet, si l'on suppose que les longueurs des plans deviennent verticales, en tournant autour de leur sommet commun, elles seront égales à la hauteur de ces plans, on aura $l = l' = h$, et la formule de la vitesse pour la descente sur des plans inclinés adossés se réduira à celle que nous venons de trouver pour la descente verticale de deux corps attachés aux bouts d'une corde qui passe sur une poulie fixe.

218. En combinant la formule $u = \frac{dx}{dt}$ avec celle qui précède, pour déterminer l'espace parcouru, on aura

$$dx = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot gtdt,$$

dont l'intégrale

$$x = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot \frac{gt^2}{2}.$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce que nous supposons que le corps qui descend part du point que l'on prend pour l'origine des espaces, lorsqu'on commence à compter le temps.

Substituons, dans cette dernière formule, la valeur de t prise dans la première, il viendra

$$u^2 = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot 2gx;$$

lorsqu'un corps est tombé librement de la hauteur x, on a, pour l'expression du carré de sa vitesse,

$$v^2 = 2gx;$$

en divisant, membre à membre, la première de ces équations par la seconde, on aura

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{m-m'}{m+m'}, \quad mu^2 + m'u^2 = mv^2 - m'v^2;$$

c'est-à-dire que la somme des produits des deux corps du système par le carré de leur vitesse, est égale à la différence des produits de ces corps par le carré de la vitesse qu'ils auraient acquise s'ils étaient tombés librement de la même hauteur.

Le produit d'une masse par le carré de sa vitesse se nomme la force vive de cette masse (205); ainsi la formule que nous venons de trouver fait voir que la somme des forces vives du système est égale à la différence des forces vives que produirait la pesanteur, dans la chute libre des masses de ce système.

Si les masses m, m' étaient égales, la somme de leurs

forces vives serait nulle, parce qu'elles resteraient en équilibre.

219. Les deux problèmes que nous venons de résoudre offrent des moyens pour ralentir, à volonté, le mouvement produit par la pesanteur, sans changer sa nature.

Nous avons vu comment Galilée s'est servi du plan incliné pour obtenir ce ralentissement, et prouver, par l'expérience, les lois du mouvement que la pesanteur imprime aux corps dans leur chute, dont il avait fait la découverte par la perspicacité de son génie.

Ces lois sont le fondement de la Dynamique; les physiciens les ont rendues sensibles par des expériences qui intéressent les personnes qui n'ont pas étudié les sciences exactes et celles qui en ont fait une étude approfondie. Le célèbre Lagrange, en voyant celles que Charles exécutait dans le beau cabinet qu'il avait formé, et qui fait partie des collections du Conservatoire des arts et métiers, témoignait à cet habile professeur la satisfaction qu'elles lui faisaient éprouver. « On aime toujours, disait-il, à voir réalisé ce qui est prouvé par le calcul. »

Le plan incliné de Galilée, qui avait été adopté par les physiciens, et auquel il avait fait diverses modifications, pour en faciliter l'usage, a été remplacé par la machine qui porte le nom d'Atwood, géomètre et physicien anglais distingué, qui l'a inventée, il y a environ cinquante ans, pour les expériences qu'il faisait dans ses cours de physique; nous allons donner succinctement la description des principales parties de cette belle et ingénieuse machine; nous appliquerons ensuite les formules du dernier problème, qui en renferment la théorie, à quelques-unes des expériences pour lesqnelles elle est employée.

220. La machine que nous allons décrire est construite sur le principe de celle d'Atwood; elle est employée avec succès aux mêmes expériences, mais, pour en diminuer le prix, les pièces qui la composent sont d'un bois moins cher, leurs formes sont moins élégantes, elles n'ont aucun ornement, et l'on a supprimé, dans le mécanisme, divers accessoires dont nous parlerons plus loin.

Cette machine, dont la *fig.* 125 représente une projection sur l'échelle d'un huitième, ou 125 millimètres pour un mètre, consiste dans une poulie de cuivre A, montée dans un châssis de même métal, fixé avec une vis sur une tablette de bois; l'arbre de la poulie est en acier, les deux pivots coniques qui le terminent sont ajustés dans les montants du châssis, de manière qu'ils éprouvent le moins de frottement possible; cet appareil simple est placé au sommet d'une colonne qui a pour base un plateau carré, traversé, vers les sommets de ses angles, par quatre vis en bois, qui servent à l'empêcher de vaciller et à rendre horizontale sa surface supérieure, afin que la position de la colonne soit verticale.

On fixe sur ce plateau, parallèlement à la colonne, une tringle de bois HI, dont la section, perpendiculaire à sa longueur, peut être un carré ou un rectangle; elle est arrêtée à côté de la tablette placée sur la colonne; sa longueur est d'environ $1^m,9$; une échelle de centimètres divisés chacun en 10 millimètres, est tracée sur sa face parallèle à la poulie.

Les pièces K et L sont deux supports avec des manchons en bois que l'on peut faire glisser le long de la tringle; ils sont munis chacun d'une vis de pression qui agit contre un ressort composé d'une plaque de cuivre, pour l'arrêter aux divisions où l'on veut successivement le placer; ces supports

sont deux plaques de cuivre: la figure *l* représente le plan du support L, qui est percé d'un trou circulaire.

Un pendule à secondes ST est adapté à la colonne, et un timbre, qui ne se trouve pas dans le dessin, est fixé à la tringle; au moyen d'une détente, son marteau est soulevé par le pendule, qui lui fait sonner les secondes.

On fait passer, dans la gorge de la poulie A, un fil de soie très fin BAC; sa longueur est d'environ 2 mètres; il est terminé à chaque bout par une boucle, dans laquelle on fait entrer le crochet de la tige fixée perpendiculairement au centre d'un disque de cuivre, qu'on nomme *bassin;* les deux bassins doivent être égaux, comme ceux d'une excellente balance.

L'unité de poids adoptée par Atwood est $\frac{1}{4}$ d'once poids de *troy* (7,77 grammes), qu'il représente par la lettre m; la série de poids dont il s'est servi se compose de $\frac{1}{4}\,m$, $\frac{1}{2}\,m$, m, $2m$ et $4m$; il faut avoir un nombre suffisant de chacun de ces poids, qui sont percés à leurs centres, pour les enfiler dans la tige de chaque bassin, et il faut aussi en avoir qui soient fendus pour laisser passer le fil, comme ceux qui sont représentés dans les figures *i* et *k*, afin de pouvoir les ajouter lorsque les bassins sont attachés au fil.

221. Les formules du dernier problème,

$$u = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot gt, \quad x = \frac{m-m'}{m+m'} \cdot \frac{gt^2}{2},$$

renferment la théorie de la machine d'Atwood, que nous venons de décrire, parce que le système de cette machine est semblable à celui du problème pour la solution duquel nous avons trouvé ces formules: on pourrait en faire usage en

substituant, à la place des lettres, les nombres donnés par les expériences; mais, par le moyen des transformations suivantes, on simplifiera les formules, et les calculs deviendront plus faciles.

En désignant par p le plus petit poids, ou la plus petite masse, et par n ce qu'il faut lui ajouter pour former la grande masse, on a

$$\frac{m-m'}{m+m'}=\frac{p+n-p}{p+n+p}=\frac{n}{2p+n},$$

et les formules deviennent

$$u=\frac{n}{2p+n}.gt, \quad x=\frac{n}{2p+n}.\frac{gt^2}{2}.$$

Pour vérifier ces formules, nous prendrons l'unité de poids $m=8$ grammes; supposons que les bassins, avec leurs tiges, pèsent chacun $20\,m$, et que l'on ait chargé chaque bassin de $19\frac{1}{2}m$, la charge totale sera de $39\frac{1}{2}m\times 2=79\,m$; le fil étant très fin, on peut négliger son poids, et les bassins qui sont attachés à ses extrémités seront en équilibre dans toutes leurs positions.

Le fond du bassin C, ou sa surface inférieure, étant amenée dans le plan horizontal qui coupe l'échelle à la division zéro, ou à l'origine des espaces, si l'on place sur le poids contenu dans ce bassin le poids $i=m$, l'équilibre sera rompu, et le bassin C descendra avec un mouvement uniformément accéléré, jusqu'au bas de l'échelle, où l'on a fixé le support K qui doit l'arrêter.

En substituant les nombres donnés à la place des lettres,

la deuxième formule devient

$$x = \frac{1}{80}\frac{gt^2}{2};$$

la pesanteur du poids additionnel m se répartit uniformément sur la masse entière, ce qui la réduit à un quatre-vingtième de ce qu'elle serait dans la chute libre d'un corps; ce ralentissement permettra d'observer sur l'échelle l'espace que le bassin C parcourra pendant chaque seconde.

Si l'on fait successivement $t = 1''$, $t = 2''$, $t = 3''$, etc., en prenant la valeur de $g = 9^{m},81$, les valeurs de x, ou les espaces parcourus, croîtront comme les carrés du temps 1, 4, 9, etc., et l'on aura

$$x = \frac{9,81}{160} \times 1 = 0^{m},061,$$
$$x = 0,061 \times 4 = 0\ ,244,$$
$$x = 0,061 \times 9 = 0\ ,549,$$
$$x = 0,061 \times 16 = 0\ ,976,$$
$$x = 0,061 \times 25 = 1\ ,525.$$

En résolvant l'équation par rapport à t, et prenant la valeur de $x = 1^{m},80$, on trouvera

$$t = \sqrt{\frac{160 \times 1,80}{9,81}}$$

$\frac{1}{2}$ log 160...........	1.1020600
$\frac{1}{2}$ log 1,80..........	0.1276321
c. $\frac{1}{2}$ log 9,81..........	9.5041655
log t..............	10.7338576

$$t = 5,4182;$$

c'est-à-dire que le bassin C mettra près de $5\frac{1}{2}$ secondes pour descendre sur le support K.

Les espaces parcourus par le bassin C seront un peu moindres que ceux que nous venons de trouver par le calcul, parce que la pesanteur de la masse additionnelle m n'est pas entièrement répartie sur la charge des bassins, il y en a une petite portion qui est absorbée par le frottement et l'inertie de la poulie.

222. Pour vérifier la première formule, qui renferme l'expression de la vitesse acquise au bout de t secondes, nous remplacerons d'abord les lettres de cette formule par les nombres dont nous venons de faire usage, et elle deviendra

$$v = \frac{1}{80} \times 9{,}81\, t = 0{,}122\, t;$$

en faisant $t = 1''$, on a $v = 0^m{,}122$; cette vitesse est double de l'espace que la pesanteur fait parcourir au bassin dans la première seconde. Si l'on fait $t = 2''$, la vitesse acquise fera parcourir au bassin, pendant les deux secondes suivantes, un espace double de celui que la pesanteur lui a fait parcourir pendant les deux premières secondes, et il en sera de même pour toutes les autres vitesses.

Il suffira d'expliquer une seule expérience, pour faire concevoir la manière de se servir de la machine d'Atwood pour obtenir ces résultats.

D'après les expériences précédentes, le bassin C parcourt $0^m{,}244$ en $2''$; fixons le support L à cette division de l'échelle, et à la place du poids additionnel i mettons le poids k, qui n'en diffère que par la forme; au bout de $2''$, le bassin traversera le support sur lequel le poids k sera arrêté, parce que

sa longueur excède le diamètre de l'ouverture du support; le mouvement deviendra uniforme, et l'on observera qu'au bout des deux secondes suivantes, le bassin aura parcouru 48,8 centimètres, ou 488 millimètres.

Les deux formules qui renferment les lois fondamentales du mouvement uniformément accéléré, sont vérifiées par les expériences que nous venons d'indiquer, et la machine d'Atwood fournit des moyens simples et faciles pour faire ces expériences; on vérifie pareillement, avec cette machine, les lois du mouvement uniformément retardé, et l'on peut encore s'en servir avec avantage dans d'autres expériences.

223. La machine dont nous venons de nous occuper a été construite dans les ateliers de MM. Pixii; elle coûte 240 francs: c'est à peu près les deux septièmes du prix d'une machine d'Atwood munie de tous ses accessoires; nous allons en indiquer succinctement les principales parties.

Sa colonne et le plateau qui forme sa base, sont en bois d'acajou d'une belle qualité et d'un travail très soigné.

C'est principalement par le mécanisme fixé au chapiteau de la colonne, que cette machine diffère de celle que nous avons décrite. Pour diminuer le frottement qu'éprouvent les pivots de l'arbre de la poulie, en tournant dans les trous creusés dans les montants de son châssis, on a ajusté parallèlement à la poulie, deux paires de roulettes de friction, et c'est sur ces roulettes, dont les circonférences n'ont entre elles que le jeu nécessaire pour ne pas gêner leurs mouvements, que tourne l'arbre de la poulie.

Le pendule qui sert à mesurer le temps est muni d'un rouage et d'un échappement à ancre, renfermés dans une boîte qui a un cadran parallèle à la poulie; le mouvement

est entretenu pendant environ une heure par la descente d'un poids, et les secondes sont en même temps frappées sur un timbre et marquées par une aiguille sur le cadran.

Par le moyen d'une détente que le pendule fait partir, le bassin auquel on a ajouté un poids additionnel, et qui était arrêté au zéro de l'échelle, est mis en mouvement à l'instant où l'aiguille des secondes marque zéro sur le cadran.

Indépendamment du support qui arrête le bassin, et de celui qui le laisse passer, soit avec toute sa charge, soit en arrêtant le poids additionnel, lorsque ses dimensions excèdent le diamètre de l'ouverture percée dans la plaque du support, il y en a un troisième qui sert pour les expériences sur le mouvement uniformément retardé; la plaque de ce troisième support, qui correspond au bassin le plus éloigné de l'échelle, a une ouverture circulaire pour laisser passer ce bassin; si l'on place un poids additionnel sur l'ouverture de ce support, il sera enlevé par le bassin qui le traversera, et le mouvement, qui était uniformément accéléré, deviendra uniformément retardé.

Lorsqu'une pareille machine ne laisse rien à désirer, ni dans l'exécution de ses pièces, ni dans leur ajustage, sa forme élégante orne un cabinet de physique; elle donne plus de facilité pour faire les expériences, et l'on obtient des résultats plus exacts que par le moyen de la machine simple représentée dans la *fig.* 125; mais l'une et l'autre rendent sensibles les lois du mouvement produit par la pesanteur. Une machine établie sur le même principe, reproduirait encore les mêmes phénomènes avec une précision très satisfaisante, en la construisant d'une manière plus simple et moins dispendieuse que celle dont nous avons donné la description.

CHAPITRE V.

DU CHOC DES CORPS.

224. Les lois de la communication du mouvement dans le choc des corps ont été découvertes vers le milieu du XVIIe siècle: Descartes paraît être le premier qui ait pressenti l'existence de ces lois, et qui ait cherché à les déterminer; mais il fut induit en erreur par les idées systématiques qu'il avait adoptées sur le mouvement, qu'il regardait comme ne devant éprouver aucune diminution. Ces lois sont dues aux recherches de Wallis, Wren et Huygens; elles ont été publiées pour la première fois en 1669 à Londres, dans les *Transactions philosophiques*.

Mariotte, qui s'est distingué parmi ceux qui cultivaient la physique à cette époque, les a vérifiées par de nombreuses expériences qu'il a décrites dans son *Traité de la percussion ou du choc des corps*, publié en 1677, et réimprimé dans ses Œuvres en 1740, deux tomes en 1 vol. in-4°.

Tous les corps ont des propriétés qui leur sont communes, mais à des degrés différents; il y en a qui ne changent pas sensiblement leurs formes lorsqu'ils sont soumis à de grandes pressions, ce sont ceux qu'on nomme des *corps durs;* d'autres cèdent facilement à de médiocres pressions, et conservent les formes qu'on leur a données: on les nomme des *corps mous*. Ceux qui cèdent d'abord à des pressions plus ou moins fortes, et qui reprennent leurs premières formes, aussitôt qu'ils n'éprouvent plus les effets de la pression à la-

quelle on les avait soumis, sont des *corps élastiques;* on les appelle aussi des corps à ressort, et l'on dit que les corps durs et les corps mous sont des corps sans ressort.

Cette classification a pour objet de faciliter l'étude des lois du mouvement, et elle a été généralement adoptée, quoique les corps ne soient pas exactement tels que nous les supposons; les plus durs ont de l'élasticité, et les plus élastiques ne le sont pas parfaitement, mais ils en approchent assez pour confirmer les conséquences déduites de la théorie.

Une force qui imprime une certaine vitesse à un corps, a pour mesure la quantité de mouvement de ce corps, ou le produit de sa masse par sa vitesse (202). Si deux forces f, f', appliquées chacune à l'une des masses m, m', leur impriment les vitesses v, v', on aura $f=mv$, $f'=m'v'$; lorsque les forces sont égales, on a

$$f=mv=m'v',\quad v=\frac{f}{m}=\frac{m'v'}{m};$$

c'est-à-dire que si une même force est successivement appliquée à deux corps, les vitesses qu'elle leur imprimera seront en raison inverse des masses de ces corps.

225. Si deux corps durs, ou deux corps mous, dont les quantités de mouvement $mv=m'v'$, se meuvent en sens contraire, suivant la ligne qui passe par leurs centres de gravité, le mouvement de ces corps sera détruit par leur choc.

La Statique ne renferme pas ce cas d'équilibre, produit par deux corps en mouvement, lorsque l'action de l'uu de ces corps est égale et directement opposée à la réaction de l'autre.

Si les deux quantités de mouvement n'étaient pas égales, le choc ne produirait pas l'équilibre, mais la loi de l'*action*

égale à la réaction aurait toujours lieu ; la plus grande quantité de mouvement serait diminuée par la réaction de la plus petite, et il ne resterait que leur différence.

CHOC DES CORPS DURS.

226. Nous supposerons que les corps, ou les mobiles qui se choquent, sont des sphères homogènes, que leurs centres se meuvent sur une ligne droite, et que tous leurs points décrivent des parallèles à cette droite, sans éprouver aucun des obstacles que pourraient produire le frottement, la résistance de l'air et la pesanteur. Les phénomènes réels ne sont pas identiques avec les résultats que l'on obtient par la théorie, dans cet état idéal, mais ils s'en rapprochent d'autant plus que les causes qui viennent d'être indiquées ont une moindre influence.

Lorsque deux corps durs se choquent, la communication du mouvement s'établit complétement aussitôt que le choc a lieu, on ne distingue point d'intervalle entre le commencement et la fin. Si ce sont deux corps mous, cette communication s'opère graduellement à mesure qu'ils se compriment, et elle n'est complète qu'au bout d'un temps, ordinairement très court, où cette compression est terminée; cependant, quoique la communication du mouvement soit différente, la loi du mouvement, après le choc des corps durs et des corps mous, est la même dans tous les cas semblables.

Dans les propositions suivantes, nous nous occuperons seulement du choc des corps durs.

Proposons-nous de trouver la vitesse que doivent avoir

deux corps durs après leur choc; les masses de ces corps étant données, ainsi que leurs vitesses avant le choc.

Soient deux corps durs sphériques, qui se meuvent dans la même direction, suivant la ligne droite RS (*fig.* 126), qui passe par leurs centres c, c', et dont tous les points décrivent des parallèles à cette droite; les données du problème sont: les forces f, f', qui ont mis ces corps en mouvement, leurs masses m, m', et leurs vitesses v, v'. Supposons que le corps dont le centre est c soit le corps choquant, sa vitesse v devra être plus grande que la vitesse v' du corps choqué.

En ajoutant les quantités de mouvement, on a

$$f + f' = mv + m'v'.$$

Après le choc, les deux corps seront en contact, leur mouvement sera le même que celui d'un seul corps égal à leur somme; en désignant par u leur vitesse, qui est l'inconnue du problème, on aura

$$f + f' = (m + m')\,u;$$

ces deux équations donnent

$$(m + m')\,u = mv + m'v', \quad u = \frac{mv + m'v'}{m + m'};$$

c'est-à-dire que la vitesse des deux corps, après le choc, est égale au quotient de la somme de leurs quantités de mouvement divisée par la somme de leurs masses.

227. Le principe de d'Alembert peut être appliqué au problème que nous venons de résoudre directement.

Il est facile de reconnaître que, par l'effet du choc, la vitesse v du corps choquant éprouve une perte de $v - u$, et que

la vitesse v' du corps choqué est augmentée de $u-v'$; d'où il résulte que les quantités de mouvement perdues et gagnées sont exprimées par $m(v-u)$, $m'(u-v')$. Ces quantités de mouvement doivent se faire équilibre, d'après le principe général; ainsi l'on a l'équation

$$m(v-u)-m'(u-v')=0;$$

en la résolvant par rapport à l'inconnue u, il viendra

$$u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}:$$

c'est la même formule que celle de la première solution.

228. Supposons maintenant que les deux masses m, m', se meuvent en sens contraire, que le mouvement de la masse m ait lieu suivant RS, et celui de la masse m' dans la direction opposée SR; la vitesse après le choc étant toujours représentée par u, la vitesse v de la masse m éprouvera la même perte $v-u$ que dans le cas précédent; mais la vitesse de la masse m', qui était $-v'$ avant le choc, gagnera $v'+u$, et la condition d'équilibre entre les quantités de mouvement perdue et gagnée donnera l'équation

$$m(v-u)-m'(v'+u)=0,$$

d'où l'on tire

$$u=\frac{mv-m'v'}{m+m'};$$

c'est-à-dire que dans le choc direct de deux corps durs, qui vont en sens contraire, la vitesse après le choc est égale au quotient de la différence des quantités de mouvement divisée par la somme des masses.

Cette formule pouvait se déduire, sans calcul, de la formule précédente, en prenant la vitesse v' avec le signe négatif.

Dans la dernière formule, le numérateur $mv - m'v'$ peut être nul, positif ou négatif; ces valeurs correspondent au mouvement qui aura lieu après le choc.

229. On détermine facilement, par le moyen des formules précédentes, la vitesse perdue par le corps choquant, et la vitesse gagnée par le corps choqué.

Lorsque les deux corps se meuvent dans la même direction, on a

$$v - u = v - \frac{mv + m'v'}{m + m'} = \frac{m'(v - v')}{m + m'},$$
$$u - v' = \frac{mv + m'v'}{m + m'} - v' = \frac{m(v - v')}{m + m'};$$

les vitesses perdues et gagnées, par les mobiles qui se choquent, sont en raison inverse de leurs masses.

Si le second mobile est en repos, on aura $v' = 0$, et la vitesse, après le choc, sera exprimée par la formule

$$u = \frac{mv}{m + m'};$$

la vitesse, après le choc, est égale à la quantité de mouvement du corps choquant, divisée par la somme des masses des deux corps.

Le corps en repos, dont la masse est m', résiste, par l'effet de son inertie, à l'impulsion qu'il reçoit du corps choquant; la vitesse des deux corps, réunis après le choc, est plus petite que celle dont le corps choquant était animé avant le choc: c'est ce que l'on voit à la simple inspection dans la formule. Si les deux mobiles avaient des masses égales, on

aurait $u = \frac{1}{2} v$; la vitesse après le choc serait la moitié de celle du corps choquant avant le choc.

Lorsque la masse m est très grande par rapport à m', cette dernière masse est entraînée par le choc de la première, avec une vitesse sensiblement égale à celle dont la première masse était animée avant le choc; on en voit des exemples frappants dans les accidents occasionnés par les événements désastreux des débâcles.

Examinons maintenant ce que devient la vitesse après le choc, lorsque la masse m' du corps en repos est très grande par rapport à la masse m du corps choquant. Cette vitesse a pour coefficient la fraction $\frac{m}{m+m'}$, qui peut être mise sous la forme $\frac{1}{1+\frac{m'}{m}}$, en divisant ses deux termes par m; on voit que cette fraction diminue à mesure que m' augmente; ainsi la masse m' peut être assez grande pour rendre la vitesse très petite après le choc; c'est ce que l'on peut observer dans un grand nombre de faits qui se présentent fréquemment. Le choc produit par les corps qui tombent verticalement sur la terre ne lui communiquent aucun mouvement sensible, parce que la masse de la Terre peut être considérée comme infiniment plus grande que celle de l'un quelconque des corps qui viennent la frapper.

230. Dans les propositions que nous avons démontrées sur le choc des corps, nous avons supposé que ces corps étaient des sphères homogènes sans ressort, c'est-à-dire des corps durs ou des corps mous; que le mouvement était dirigé suivant la ligne droite qui passe par les centres du corps choquant et du corps choqué, et qu'il n'éprouvait aucun ralen-

tissement par l'influence de la pesanteur, de la résistance de l'air et de celle du frottement.

Ces conditions ne peuvent pas être réalisées en toute rigueur, mais il suffit d'en approcher assez pour constater que l'expérience confirme les lois de la communication du mouvement déduites de la théorie. Voici comment Mariotte y est parvenu.

Il a inventé une machine dont le principe a été adopté par les physiciens; elle consiste en un triangle isoscèle que l'on peut tracer sur un mur, ou bien sur un tableau triangulaire construit avec des planches, afin de pouvoir le transporter où l'on veut faire les expériences; la hauteur de ce triangle est de 5 ou 6 pieds; on mène près du sommet, dans le plan du triangle, une ligne droite parallèle à sa base, on prend sur cette droite deux points, chacun à un pouce de distance de celle qui partage l'angle du sommet en deux parties égales; on plante à chacun de ces points un clou, ou une cheville, d'environ 3 pouces de longueur, perpendiculairement au plan du triangle, pour y attacher les fils auxquels sont suspendues les deux sphères préparées pour l'expérience: elles doivent se toucher, sans exercer aucune pression l'une contre l'autre.

Les fils auxquels sont suspendues les sphères sont égaux entre eux: ils ont chacun 4 ou 5 pieds de longueur, depuis le point de suspension jusqu'au crochet de la sphère; des arcs de cercle sont décrits dans le plan du triangle, avec chacun de ces fils comme rayons, et divisés en degrés.

Pour former les sphères, on fait usage de terre glaise suffisamment humectée: on place au centre un petit morceau de liége dans lequel on met un fil d'archal dont les deux bouts sont dirigés suivant deux rayons perpendiculaires entre eux;

le bout de l'une des parties de ce fil est courbé en crochet pour attacher la sphère au fil de suspension; l'autre partie extérieure est une petite tige qui sert pour amener la sphère au degré de l'arc de cercle d'où l'on veut la faire partir.

Ce n'est donc pas suivant la ligne droite qui passe par leurs centres qu'on fait mouvoir les sphères, pour observer les lois de la communication du mouvement; on leur fait parcourir des portions d'arcs de cercle, ce qui donne un moyen simple et facile de les mettre en mouvement.

Lorsque les arcs parcourus ont peu d'étendue, tels que des arcs de 12 ou 15 degrés, les vitesses acquises en les parcourant sont sensiblement proportionnelles à ces arcs; alors il suffit de compter les degrés pour estimer les vitesses des sphères immédiatement avant et après le choc; c'est ce que nous éclaircirons plus loin, lorsque nous nous occuperons du mouvement d'oscillation.

Les expériences faites avec la machine de Mariotte confirment les règles déduites des formules précédentes; on trouve, dans ces expériences, que la sphère choquante fait parcourir à la sphère choquée des arcs un peu moindres, mais qui s'écartent peu de ceux qui sont indiqués par le calcul; ces résultats approchés, pour tous les cas du choc des corps mous, qui seraient les mêmes pour les corps durs, ne laissent aucun doute sur les lois de la communication du mouvement dans le choc de ces corps.

231. On appelle *force de percussion*, ou simplement percussion, l'impression qu'un corps fait sur un autre par son choc; il n'y a point de force qui soit employée à un plus grand nombre d'usages: elle sert à communiquer le mouvement à un corps isolé, à le séparer en plusieurs parties;

c'est par le moyen de la percussion que l'on travaille le fer et les autres métaux; en les battant on augmente leurs densités, et on leur donne les formes qui les rendent propres à confectionner cette multitude d'instruments, de machines et d'ustensiles que les arts industriels nous fournissent.

Il y a une autre force qui a de l'analogie avec la percussion, et qui est employée avec avantage, dans plusieurs circonstances, pour la remplacer : c'est la *force de pression;* elle a été substituée au martelage dans les usines à fer : il en est résulté une économie dans les dépenses et une augmentation considérable dans les produits.

Malgré la similitude qui existe entre les effets que produisent la percussion et la pression, ces deux forces n'ont pas de mesure commune, parce qu'elles n'agissent pas de la même manière : l'effet de la première est produit dans un temps si court qu'on peut le regarder comme instantané, et celui de la seconde a lieu graduellement, pendant un temps que l'on peut mesurer.

CHOC DES CORPS ÉLASTIQUES.

232. Nous allons nous occuper de la communication du mouvement, dans le choc direct des corps élastiques, ou des corps à ressort, en les considérant comme des corps parfaitement élastiques, ou en supposant que quel que soit le mouvement qui leur est imprimé, ils reprennent, immédiatement après le choc, la figure qu'ils avaient avant de s'être choqués; nous avons déjà observé que cette élasticité parfaite n'existe dans aucun des corps que nous connaissons; les

règles que fournit la théorie fondée sur cette hypothèse sont des limites, et les résultats que l'on obtient par l'expérience en approchent assez pour les confirmer.

Proposons-nous de déterminer le mouvement que doivent avoir, après s'être choqués, deux corps sphériques homogènes et parfaitement élastiques.

Ces deux sphères étant mises en mouvement, de manière qu'elles aillent se choquer avec des masses et des vitesses connues, dirigées suivant une ligne droite qui passe par leurs centres, il s'agit de trouver les formules par lesquelles on peut calculer les vitesses qui leur sont imprimées par le choc.

Soient m et m' les masses de deux sphères, qui ont leurs centres C, C', sur la ligne droite RS (*fig.* 127), et dont tous les points décrivent des parallèles à cette droite, suivant la même direction; ces sphères se meuvent avec des vitesses que nous désignerons par v, v', et la vitesse v, de la première sphère, sera plus grande que la vitesse v' de la seconde, puisqu'elles se choquent en allant dans la même direction; représentons par x et x' les vitesses inconnues qui leur seront imprimées par le choc.

Lorsque la première sphère a atteint la seconde, il y a d'abord une compression semblable à celle qui aurait lieu dans le choc de deux corps mous, et à la fin de laquelle les deux sphères auront la même vitesse $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$; la première sphère, ou la sphère choquante, a fait une perte de vitesse exprimée par $v - u$, et la vitesse de la sphère choquée a reçu un accroissement de $u - v'$; alors l'action de l'élasticité se manifeste, et ses effets produisent, dans la première sphère, une perte de vitesse égale à celle que la compression lui avait

fait éprouver, et pour la seconde sphère, un accroissement de vitesse égal à celui qu'elle avait déjà reçu; de sorte qu'après le choc, $2(v-u)$ est la perte de vitesse de la sphère choquante, et la vitesse de la sphère choquée a reçu un accroissement de $2(u-v')$; ainsi les vitesses des sphères, après le choc, sont exprimées par les équations

$$x = v - 2(v-u) = 2u - v,$$
$$x' = v' + 2(u-v') = 2u - v',$$

qui renferment la règle suivante:

Prenez le double de la vitesse u qui aurait lieu pour les deux corps réunis après le choc, s'ils étaient des corps mous; retranchez de cette vitesse la vitesse de chaque mobile avant le choc; les restes seront les vitesses des mobiles après le choc.

233. En retranchant, membre à membre, la deuxième de ces équations de la première, on aura

$$x - x' = -v + v'.$$

On appelle *vitesse relative* de deux mobiles la différence de leurs vitesses, et ce résultat fait voir qu'à des temps égaux, avant et après le choc de deux corps élastiques, leurs vitesses relatives sont égales et de signe contraire.

Dans le choc des corps mous, ou des corps durs, les deux mobiles restent juxtaposés après le choc, et ils se meuvent comme s'ils ne formaient qu'un seul corps; par conséquent leur vitesse relative est zéro après le choc.

La valeur de u étant substituée dans les valeurs des vitesses

x et x', après le choc, elles deviennent

$$x = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v = \frac{mv + 2m'v' - m'v}{m + m'}$$
$$= v + \frac{2m'v' - 2m'v}{m + m'} = v - \frac{2m'(v - v')}{m + m'},$$

$$x' = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v' = \frac{2mv + m'v' - mv'}{m + m'}$$
$$= v' + \frac{2mv - 2mv'}{m + m'} = v' + \frac{2m(v - v')}{m + m'}.$$

Pour appliquer ces formules à un exemple numérique, nous observerons que les masses des sphères, ou des mobiles, peuvent être remplacées par leurs poids, car on a $p = mg$ (200). Ainsi, en mettant les poids p, p' à la place des masses m, m', les deux termes de chacune des fractions que renferment les formules seront multipliés par la même quantité $g = 9^m,809$, ce qui ne produira aucun changement dans les valeurs de ces fractions.

Supposons que le poids de la première sphère, ou du corps choquant, soit de 125 grammes, et sa vitesse $v = 2$ mètres par seconde; que le poids de la seconde sphère soit de 219 grammes, et sa vitesse $v' = 0^m,65$; ces valeurs étant substituées dans les formules à la place des lettres, on aura

$$x = 2^m - \frac{2 \times 219(2 - 0,65)}{125 + 219} = 2 - \frac{438 \times 1,35}{344} = 0^m,28,$$

$$x' = 0^m,65 + \frac{2 \times 125 \times 1,35}{344} = 1^m,63.$$

Les deux mobiles vont encore dans le même sens après le choc, mais la vitesse du corps choquant est réduite à peu près au septième de ce qu'elle était avant le choc, et celle du corps choqué est plus que doublée.

On trouverait les mêmes résultats en effectuant les calculs d'après la règle déduite des deux premières formules.

234. Il est facile d'introduire dans les formules

$$x = v - \frac{2m'(v-v')}{m+m'}, \quad x' = v' + \frac{2m(v-v')}{m+m'},$$

les modifications qui conviennent aux divers cas que présente le choc de deux corps élastiques qui vont dans le même sens.

Lorsque les deux mobiles ont des masses égales, on a $m = m'$, et les formules deviennent

$$x = v - (v - v') = v', \quad x' = v' + v - v' = v;$$

il résulte de cette condition, que les deux mobiles ont échangé leurs vitesses.

Dans l'exemple que nous avons calculé, si l'on fait $m = m' = 125$, les autres quantités restant les mêmes, on trouvera $x = 0{,}65$, $x' = 2$; après avoir échangé leurs vitesses, par l'effet du choc, les deux mobiles continuent à se mouvoir dans la même direction.

Les masses m et m' des deux sphères étant égales, supposons que la masse m' soit en repos lorsqu'elle reçoit le choc, on aura $v' = 0$, et les formules qui expriment les vitesses des mobiles après le choc deviendront $x = 0$, $x' = v$. L'effet du choc produit encore un échange de vitesse : le corps choqué se meut avec la vitesse que lui a communiquée le corps choquant, et celui-ci n'ayant reçu aucune vitesse du corps choqué, il reste en repos.

Cet échange de vitesse, ou cette transmission de mouvement, a lieu quel que soit le nombre des sphères; s'il y a une

troisième sphère égale à chacune des deux autres, et que la seconde soit choquée par la première, celle-ci restera en repos après le choc; ensuite la troisième sera choquée par la seconde qui restera en repos après ce deuxième choc. S'il y avait une quatrième sphère, elle recevrait pareillement la vitesse de la troisième, qui resterait en repos ainsi que les deux premières. La même transmission de vitesse aurait lieu successivement pour un nombre quelconque de sphères égales entre elles, placées à la suite les unes des autres; de manière que leurs centres soient tous sur la même droite horizontale.

Nous avons supposé que chaque sphère recevait la vitesse de celle qui la suit par un choc, ce qui a lieu lorsque les sphères sont séparées; si elles se touchent, le choc de la première produira le même effet; toutes les sphères intermédiaires resteront en repos, et la dernière seule partira avec une vitesse égale à celle de la première; le choc de plusieurs des premières sphères en fera partir un nombre égal des dernières, sans produire aucun mouvement dans celles du milieu.

235. Dans le cas où les deux sphères, dont les masses sont m et m', ont des directions contraires avant le choc (*fig.* 128), on a encore $2(u-v)$ pour la perte de vitesse que le choc fait éprouver à la première sphère, et sa vitesse après le choc est exprimée par $x = 2u - v$.

Quant à la seconde sphère, qui vient à la rencontre de la première, sa vitesse est $-v'$ avant le choc; à la fin de la compression, lorsque les deux sphères ont la même vitesse, celle de la seconde sphère a perdu $u-(-v') = u+v'$; l'action du ressort, ou de l'élasticité, double cette perte, et après le choc, la vitesse de la seconde sphère a pour expression

$$x' = -v' + 2(u+v') = 2u + v'.$$

Les deux mobiles ayant des directions contraires avant le choc, on a

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'};$$

en substituant cette valeur de u dans les expressions des vitesses après le choc, il viendra

$$x = \frac{2(mv - m'v')}{m + m'} - v = \frac{mv - 2m'v' - m'v}{m + m'} = v - \frac{2m'(v + v')}{m + m'},$$

$$x' = \frac{2(mv - m'v')}{m + m'} + v' = \frac{2mv - m'v' + mv'}{m + m'} = -v' + \frac{2m(v + v')}{m + m'}.$$

Ces deux formules ne diffèrent que par le signe de la vitesse v' du second mobile, de celles que nous avons trouvées pour le choc de deux corps élastiques qui vont dans le même sens.

Lorsque les masses m et m' sont égales, les formules deviennent

$$x = v - v - v' = -v', \quad x' = -v' + v + v' = v;$$

chacun des mobiles se meut, après le choc, avec la vitesse et dans la direction de l'autre mobile, avant le choc.

Si les quantités de mouvement mv et $m'v'$ sont égales entre elles, on aura

$$x = -v, \quad x' = +v';$$

chaque mobile rétrogradera, avec la vitesse qu'il avait avant le choc.

La machine de Mariotte, dont nous avons indiqué le principe, les principales dispositions, et la manière de l'appliquer aux expériences du choc direct des corps mous, sert aussi pour celles que l'on fait sur les corps élastiques.

Pour faire ces expériences, on emploie des sphères, ou des billes d'ivoire, que l'on attache à des fils, pour les suspendre aux tiges placées vers le sommet de la machine, de sorte qu'elles se touchent, et que leurs centres soient sur une ligne droite horizontale; en écartant une ou plusieurs de ces billes, dans le plan vertical qui passe par leurs centres, et les abandonnant ensuite à l'action de la pesanteur, elles se choquent avec des vitesses qui sont indiquées par l'échelle tracée sur la machine.

Toutes les lois théoriques de la communication du mouvement peuvent être rendues sensibles par ces expériences; les différences entre leurs résultats et ceux que l'on obtient en effectuant les calculs indiqués par les formules, proviennent de ce que les billes ne sont pas entièrement homogènes, qu'elles ne sont pas parfaitement élastiques, comme on l'a supposé, et que leurs mouvements sont ralentis par la résistance de l'air. En tenant compte des altérations produites par ces causes, on reconnaît que les lois découvertes par la théorie sont confirmées par les résultats de l'expérience, avec une approximation suffisante pour convaincre que ces lois sont les véritables lois de la nature.

236. Nous n'avons considéré que les deux cas extrêmes de la communication du mouvement dans le choc des corps : celui des corps sans ressort, qui sont les corps durs et les corps mous, et celui des corps à ressort parfait, ou des corps parfaitement élastiques; il est facile de faire entrer dans les formules qui concernent ces derniers corps la condition qui convient aux corps imparfaitement élastiques.

Désignons par $1 : n$ le rapport de l'élasticité parfaite à un degré quelconque d'élasticité; le conséquent n de ce rapport sera plus petit que l'unité, dans tous les cas d'élasticité im-

parfaite; les deux corps, ou les deux mobiles, dont les masses sont représentées par m et m', se meuvent dans le même sens suivant la droite RS qui passe par leurs centres (*fig.* 126), et la vitesse v du premier mobile, avant le choc, est plus grande que la vitesse v' du second. Lorsque le choc aura lieu, le premier mobile, ou le corps choquant, perdra d'abord la vitesse $v - u$, le ressort lui fera perdre ensuite $n(v - u)$; ainsi sa perte de vitesse aura pour expression $v - u + n(v - u) = (1 + n)(v - u)$. La vitesse du corps choqué sera augmentée, par l'effet du choc, de $u - v' + n(u - v') = (1 + n)(u - v')$, et par conséquent les vitesses des mobiles, après le choc, seront exprimées par les équations

$$x = v - (1 + n)(v - u) = (1 + n)u - nv,$$
$$x' = v' + (1 + n)(u - v') = (1 + n)u - nv';$$

en substituant la valeur de $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$, et effectuant les réductions, il viendra

$$x = \frac{(m - nm')v + (m' + nm')v'}{m + m'},$$
$$x' = \frac{(m + nm)v + (m' - nm)v'}{m + m'}.$$

Ces formules reproduisent celles du choc des corps mous, ou des corps durs, en faisant $n = 0$; et si l'on fait $n = 1$, on retrouve celles du choc des corps parfaitement élastiques.

On trouverait, par des opérations semblables, les formules des vitesses après le choc, lorsque les mobiles ont des directions contraires avant le choc.

D'ailleurs les formules du choc, lorsque les mobiles suivent la même direction, ne diffèrent de celles du choc avec

des directions contraires, que par le signe de la vitesse v' du second mobile; de sorte que les deux cas sont renfermés dans les formules suivantes:

$$x = \frac{(m - nm')v \pm (m' + nm')v'}{m + m'}, \quad x' = \frac{(m + nm)v \pm (m' - nm)v'}{m + m'}.$$

Lorsque les mobiles iront dans le même sens avant le choc, on prendra ces formules avec le signe supérieur, et si les mobiles vont se choquer avec des directions contraires, les formules devront être prises avec le signe inférieur.

237. Lorsqu'un corps élastique choque un plan fixe, parfaitement dur, suivant une direction perpendiculaire à ce plan, l'élasticité du corps choquant le fait revenir vers le point de départ, suivant la même perpendiculaire.

C'est ce que l'on peut observer en faisant tomber des billes d'ivoire sur un marbre dont la surface qui reçoit le choc est horizontale et bien polie; le choc détruit la vitesse du mobile, mais il reçoit ensuite celle que comporte son degré d'élasticité, et il s'élève avec cette vitesse, suivant la verticale qu'il a parcourue dans sa chute.

Le mobile qui vient choquer obliquement un plan fixe étant une sphère, ou une bille, dont l'élasticité est à l'élasticité parfaite comme n : 1, *on demande le rapport des angles que les directions du mobile, avant et après le choc, forment avec le plan fixe.*

Soit le plan fixe MN (*fig.* 129), qui est choqué obliquement par une sphère élastique dont le centre décrit la ligne droite *bc*; le choc détruit la vitesse dont le mobile était animé, mais le ressort, ou l'élasticité, lui imprime une vitesse avec laquelle son centre décrit la droite *cb'* après le choc. Menons, parallèlement au plan MN, la droite *dd'*, qui passe par le

centre c du mobile; les angles que ses directions forment avec le plan, avant et après le choc, sont bcd, $b'cd'$: nous les représenterons par les lettres a et a'.

L'angle $bcd = a$, formé par la direction du mobile avec le plan MN, se nomme *angle d'incidence;* on appelle *angle de réflexion* l'angle $b'cd' = a'$, formé par la direction du mobile avec le plan fixe, après le choc; ces deux angles sont dans le même plan mené par la direction bc du mobile, avant le choc, perpendiculairement au plan MN, car le mouvement du mobile n'est modifié que par le choc, dont l'effet ne s'exerce que dans le sens de la normale à ce plan.

Décomposons la vitesse v du mobile, avant le choc, en deux autres: l'une $v \cos a$, parallèle au plan MN, et l'autre $v \sin a$, perpendiculaire au même plan; la composante $v \cos a$ n'éprouve aucun changement par l'effet du choc; mais la composante $v \sin a$, perpendiculaire au plan, devient $nv \sin a$ après le choc.

On a, par les formules trigonométriques,

$$\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \text{tang}\, a' = \frac{\sin a'}{\cos a} = \frac{n \sin a}{\cos a};$$

d'où l'on tire la proportion

$$\text{tang}\, a : \text{tang}\, a' :: 1 : n;$$

c'est-à-dire que l'angle d'incidence est à l'angle de réflexion, comme l'unité est à l'élasticité du mobile.

Les angles d'incidence et de réflexion seraient égaux entre eux, si le mobile était parfaitement élastique; mais les corps les plus élastiques n'ont pas cette élasticité parfaite, et par conséquent l'angle de réflexion sera toujours plus petit que l'angle d'incidence.

238. C'est sur les lois du choc des corps sphériques élastiques qu'est fondé le jeu de billard; mais il faut observer qu'on ne parvient pas à reproduire exactement les résultats qui seraient exprimés par le calcul, parce que ni les billes d'ivoire que l'on emploie, ni les bandes du billard qu'elles vont frapper ne sont parfaitement élastiques, et la densité de ces billes n'est pas uniforme, comme nous l'avons supposé; d'ailleurs le tapis de drap sur lequel elles se meuvent leur fait éprouver un frottement qui leur communique un mouvement de rotation, et il en résulte qu'après le choc de deux billes, la bille choquante ayant communiqué son mouvement de translation à la bille choquée, elle ne s'arrête pas sur-le-champ, parce que le mouvement de rotation qui lui reste la fait avancer; cependant ces causes d'irrégularité n'empêchent pas les joueurs habiles d'exécuter sur le billard, avec une justesse remarquable, les effets que prescrivent les règles de ce jeu, qui sont renfermées dans un petit nombre de problèmes, et qui exigent moins de théorie que d'adresse et d'exercice.

Le billard n'est pas seulement un exercice de récréation et de délassement, on s'en sert dans les cours de Physique pour rendre sensibles les lois de la percussion dans le choc des corps élastiqnes, et pour diverses expériences intéressantes sur d'autres lois du mouvement. Au lieu d'employer le drap pour couvrir la surface et les bandes du billard, les physiciens préfèrent le marbre, afin de diminuer le frottement; le billard dont ils font usage renferme une table de marbre, posée sur un parquet en bois; la surface supérieure de cette table forme un plan, qui doit être exactement dressé et bien poli, ainsi que les bandes du billard, qui sont pareillement en marbre.

Il nous reste encore à expliquer comment le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, et celui de la conservation des forces vives, se déduisent de la théorie du choc des corps, et nous terminerons ce chapitre en donnant quelques notions sur un cas particulier du principe de la moindre action.

239. Les formules qui expriment les lois de la communication du mouvement dans le choc direct des corps, peuvent servir pour vérifier plusieurs autres lois du mouvement: occupons-nous d'abord de celle qui concerne le mouvement du centre de gravité.

Soient m', m'' les masses de deux sphères qui se meuvent dans le même sens, avec les vitesses v', v'', suivant la ligue droite AB qui passe par leurs centres c', c'' (*fig.* 130); prenons un point A sur cette droite, pour l'origine des espaces; désignons par x la distance AG du point A au centre de gravité G des deux sphères, au bout du temps t, et par x', x'' les distances au même instant, de l'origine A aux centres c', c'', des sphères; la résultante des masses m', m'', passe par leur centre de gravité G, et leurs moments étant pris par rapport au point A, on aura

$$x = \frac{m'x' + m''x''}{m' + m''};$$

en différentiant, et divisant par dt, il vient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m'\frac{dx'}{dt} + m''\frac{dx''}{dt}}{m' + m''}.$$

Cette équation différentielle fera connaître la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du centre de gravité, lorsque $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx''}{dt}$, qui représentent les vi-

tesses correspondantes des sphères, seront déterminées; mais on a

$$\frac{dx'}{dt} = v', \quad \frac{dx''}{dt} = v'';$$

en substituant ces valeurs à la place des expressions différentielles, l'équation devient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m'v' + m''v''}{m + m'};$$

ce qui fait voir que la vitesse du centre de gravité, avant le choc, est égale à la somme des quantités de mouvement des deux mobiles, divisée par la somme de leurs masses. Cette expression est la même que celle que nous avons trouvée (226), pour la vitesse commune de deux corps durs, ou de deux corps mous, après le choc : donc le choc des corps sans ressort ne produit aucune altération dans le mouvement de leur centre de gravité.

240. Dans le choc des corps élastiques, l'équation différentielle est la même que pour les corps durs, et l'on en déduit la même expression pour la vitesse de leur centre de gravité, avant le choc.

La vitesse du centre de gravité, après le choc, étant représentée par V, et les vitesses correspondantes des mobiles par V′ et V″, on a

$$\frac{dx}{dt} = V, \quad \frac{dx'}{dt} = V', \quad \frac{dx''}{dt} = V'';$$

ces valeurs étant substituées à la place des expressions différentielles, on aura

$$V = \frac{m'V' + m''V''}{m' + m''};$$

après le choc, les mobiles se meuvent avec les vitesses

$$V' = 2u - v', \quad V'' = 2u - v''.$$

Multipliant la première de ces équations par m', la seconde par m'', et ajoutant les produits membre à membre, il viendra

$$m'V' + m''V'' = 2(m' + m'')u - (m'v' + m''v'');$$

en mettant la valeur de $u = \frac{m'v' + m''v''}{m' + m''}$, et réduisant, on aura

$$m'V' + m''V'' = m'v' + m''v''.$$

Si l'on substitue le second membre de cette équation à la place du premier, on verra que la vitesse V du centre de gravité des deux mobiles, après le choc, est la même que celle qui avait lieu avant le choc; donc dans le choc des corps parfaitement élastiques, comme dans celui des corps durs, le mouvement du centre de gravité n'est pas altéré par l'effet du choc.

Dans tous les cas ordinaires, les corps ont un certain degré d'élasticité, et l'on a, pour leurs vitesses après le choc (236),

$$V' = (1 + n)u - nv', \quad V'' = (1 + n)u - nv'';$$

multipliant la première de ces équations par m', la deuxième par m'', et les ajoutant membre à membre, on aura

$$m'V' + m''V'' = (1 + n)(m' + m'')u - n(m'v' + m''v'');$$

la valeur de u étant substituée dans cette équation, elle devient

$$m'V' + m''V'' = m'v' + m''v''.$$

Les termes relatifs à l'élasticité ont disparu, et l'on retrouve le même résultat que dans le cas précédent; d'où il résulte que le choc n'altère pas le centre de gravité des mobiles.

Ce que nous venons de prouver pour deux corps a lieu dans tout système de corps en mouvement; le choc de ces corps, ou en général les actions qu'ils exercent les uns sur les autres, n'ont aucune influence sur le mouvement de leur centre de gravité.

La loi qu'on a nommée *conservation du mouvement du centre de gravité*, consiste dans ce théorème, ou dans cette proposition générale, que Newton a donnée comme axiome au commencement de l'ouvrage des *Principes;* elle est, pour un système, ce que la loi d'inertie est pour un corps, qui conserverait son état de repos ou de mouvement, s'il n'était sollicité par aucune cause étrangère.

241. Le deuxième principe est celui de la *conservation des forces vives;* nous avons vu (**205**) qu'on appelle force vive d'un corps le produit de sa masse par le carré de sa vitesse; en représentant par m la masse d'un corps, et par v sa vitesse, le produit mv^2 sera l'expression de sa force vive.

Nous allons d'abord prouver que la conservation des forces vives a lieu dans le choc des corps parfaitement élastiques; c'est-à-dire que la somme des forces vives de ces corps, avant le choc, est égale à la somme de ces mêmes forces après le choc.

Reprenons les deux formules (**233**)

$$w = \frac{mv + 2m'v' - m'v}{m + m'} = \frac{mv + m'(2v' - v)}{m + m'},$$

$$w' = \frac{m'v' + 2mv - mv'}{m + m'} = \frac{m'v' + m(2v - v')}{m + m'};$$

en les élevant au carré, multipliant ensuite la première par

m, la seconde par m', et ajoutant les produits, il viendra

$$mw^2 + m'w'^2 = \frac{m^3v^2 + m^2m'(2v^2 + v'^2) + m'^3v'^2 + mm'^2(2v'^2 + v^2)}{m^2 + 2mm' + m'^2};$$

le numérateur du second membre étant divisé par son dénominateur, on aura

$$mw^2 + m'w'^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

Ce résultat vérifie le principe de la conservation des forces vives dans le choc de deux corps parfaitement élastiques; on peut en conclure, par induction, que ce principe aura lieu dans le choc d'un nombre quelconque de corps élastiques, c'est-à-dire que le choc de ces corps ne produira aucune altération dans leurs forces vives.

242. Cherchons ce que deviennent les forces vives, après le choc de deux corps imparfaitement élastiques.

Les vitesses des corps, après le choc, sont exprimées par les formules (236)

$$w = \frac{(m - m'n)v + (m' + m'n)v'}{m + m'}, \quad w' = \frac{(m + mn)v + (m' - mn)v'}{m + m'}.$$

En élevant ces formules au carré, multipliant la première par m et la seconde par m', ajoutant les produits membre à membre, et divisant le numérateur et le dénominateur du second membre par leur commun diviseur $m + m'$, il viendra

$$mw^2 + m'w'^2 = \frac{(m^2 + mm'n^2)v^2 + 2(mm' - mm'n^2)vv' + (m'^2 + mm'n^2)v'^2}{m + m'};$$

divisant chaque coefficient renfermé entre parenthèses par le dénominateur $m + m'$, et séparant les termes entiers des

termes fractionnaires, on aura

$$mw^2 + m'w'^2 = mv^2 + m'v'^2 - (1 - n^2)\frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$mv^2 + m'v'^2 - mw^2 - m'w'^2 = (1 - n^2) \cdot \frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2.$$

Dans le cas des corps parfaitement élastiques, on a $n = 1$, et la différence des forces vives est zéro, ce qui est conforme à ce que nous avons avons déjà trouvé.

Lorsque les corps qui se choquent sont sans ressort, on a $n = 0$; les vitesses après le choc sont égales, ce qui donne $w = w' = u$, et la formule devient

$$mv^2 + m'v'^2 - mu^2 - m'u^2 = \frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2 = m(v - u)^2 + m'(u - v')^2.$$

Pour vérifier l'égalité des deux expressions du second membre de cette formule, il suffit de substituer, dans la dernière, la valeur de $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$; les calculs étant effectués, on trouvera la première expression de la perte que le choc des corps durs fait éprouver aux forces vives.

243. Dans le choc des diverses parties d'un système de corps durs, quel que soit leur nombre, et soit que le choc se fasse immédiatement, ou par le moyen d'une machine quelconque sans ressort, la somme des forces vives, avant le choc, est toujours égale à la somme des forces vives après le choc, plus la somme des forces vives qui aurait lieu, si chacun des corps se mouvait librement avec la seule vitesse qu'il a perdue par le choc.

Considérons seulement l'un des corps du système; soit AB (*fig.* 131) la grandeur et la direction de sa vitesse avant le choc, et AC sa vitesse après le choc. En achevant le parallélogramme ACBD, on voit que la diagonale AB est la résultante de la vitesse AC qui reste à ce corps après le choc, et de la vitesse AD que le choc lui a fait perdre.

Abaissons la perpendiculaire BH sur le côté AC prolongé; la propriété du triangle rectangle donnera

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2;$$

le côté AH étant divisé en deux parties AC, CH, dont la seconde est l'un des côtés du triangle rectangle CHB, on aura

$$\overline{AH}^2 = (AC + CH)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CH}^2 + 2AC \times CH,$$
$$\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CH}^2;$$

le triangle rectangle CHB donne

$$CH = BC \cos BCH = AD \cos DAC;$$

ces valeurs étant substituées dans le second membre de la première équation, il viendra

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + 2AC.AD \cos DAC.$$

Représentons par m la masse de l'un des corps du système, et faisons $AB = v$, $AC = u$, $AD = w$; en multipliant ensuite tous les termes par m, et observant que pour chacun des autres corps on aura un résultat partiel semblable à celui que nous venons de trouver, on concevra que la somme, ou le résultat général, sera représenté par la formule suivante,

dans laquelle S est la caractéristique de l'intégrale, ou de la somme de tous les termes semblables que renferme le système

$$Smv^2 = Smu^2 + Smw^2 + 2Smw . u \cos DAC.$$

Le dernier terme est le double de la somme des produits des quantités de mouvement perdues par tous les corps du système, multipliées par leurs vitesses après le choc, estimées suivant les directions de ces quantités de mouvement; ce terme doit être nul, d'après le principe de d'Alembert combiné avec celui des vitesses virtuelles.

En effet, d'après le premier de ces principes, les quantités de mouvement perdues mw sont telles que si elles existaient seules, le système serait en équilibre; et d'après le principe des vitesses virtuelles, la somme des produits de ces quantités de mouvement multipliées par les petits espaces $AE = u \cos DAC$, qu'ils décrivent, ou par les vitesses des corps du système, estimées suivant les directions de ces quantités de mouvement, doit être égale à zéro; ainsi l'on a

$$Smw . u \cos DAC = 0,$$

et ce terme étant supprimé, la formule devient

$$Smv^2 = Smu^2 + Smw^2;$$

ce qui est la traduction algébrique de l'énoncé du théorème.

Par une simple transposition de termes, on aura

$$Smu^2 = Smv^2 - Smw^2;$$

on voit, par cette formule, que la somme des forces vives

des corps du système, après le choc, est égale à la somme de leurs forces vives avant le choc, moins la somme des forces vives qu'ils auraient s'ils étaient animés des vitesses que le choc leur a fait perdre.

244. La formule qui renferme l'expression algébrique du théorème sur la perte de forces vives dans le choc des corps durs, a été déduite d'hypothèses que nous allons vérifier, en appliquant cette formule pour résoudre le problème du choc de deux corps durs, ou pour chercher l'expression de leur vitesse après le choc, par le moyen de leurs vitesses avant le choc.

Soient m et m' leurs masses, v la vitesse du premier et v' celle du second, avant le choc; nous supposerons que ces corps sont deux sphères qui se meuvent dans la même direction, suivant la ligne droite qui passe par leurs centres, et que la vitesse v' du second, qui est en avant, est moindre que la vitesse v du premier.

Désignons par u la vitesse commune des deux corps, après le choc; le premier perdra, par l'effet du choc, la vitesse $v-u$, et le second recevra l'accroissement de vitesse $u-v'$, ou bien il perdra la vitesse $-(u-v')$, et la formule des forces vives après le choc deviendra

$$mu^2 + m'u^2 = mv^2 + m'v'^2 - m(v-u)^2 - m'(u-v')^2;$$

en effectuant les calculs, et supprimant les termes qui se détruisent, on trouvera

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'};$$

cette formule est celle que nous avons déjà trouvée (**226**),

en employant d'autres considérations pour résoudre ce problème.

La perte de forces vives produite par des chocs brusques, dans un système de corps durs en mouvement, dépend de l'intensité de ces chocs; lorsqu'ils sont très faibles, que le mouvement est ralenti, et que les chocs s'opèrent par une suite de petites impulsions successives, qui diffèrent peu d'une simple pression, la vitesse perdue w est très petite, son carré w^2 est un infiniment petit du second ordre; au bout d'un temps fini, cette vitesse perdue n'est qu'un infiniment petit du premier ordre, et le terme Smw^2, relatif à cette vitesse perdue, disparaît devant le terme Smv^2; alors la formule est réduite à $Smu^2 = Smv^2$, et par conséquent la conservation des forces vives a lieu comme si tous les corps du système étaient parfaitement élastiques.

245. Pour résoudre les divers problèmes de la Dynamique, les géomètres devaient d'abord chercher les principes, ou les théorèmes, applicables à chaque problème. Newton a donné celui de la conservation du mouvement du centre de gravité, au commencement de son immortel ouvrage des *Principes de mathématiques de la Philosophie naturelle*. Le célèbre Huygens a trouvé celui de la conservation des forces vives, et il en a fait usage, sous une forme différente de celle qu'on lui donne maintenant, pour trouver la solution d'un problème sur le pendule composé, qui a été l'objet de beaucoup de recherches; nous nous en occuperons plus loin.

Il restait encore à compléter le principe de la conservation des forces vives, pour en faire l'application au calcul des machines en mouvement; cette lacune a été remplie par le théorème précédent, qu'on a nommé *théorème de Carnot*. La découverte de ce théorème, qui donne le moyen de cal-

culer la perte de force vive, produite par les chocs brusques, dans le mouvement des machines, suffirait pour faire passer le nom de Carnot à la postérité : elle a été publiée en 1783, dans un petit volume que l'auteur a fait réimprimer en 1803, avec beaucoup de développements, sous le titre de *Principes généraux de l'équilibre et du mouvement*.

Dans la construction des machines, la régularité du mouvement est l'une des principales conditions qu'il est essentiel d'obtenir; toute saccade, ou choc brusque, occasionne une perte de force vive: cette force perdue, pour l'effet utile de la machine, n'est pas anéantie, elle va ébranler diverses parties d'ajustage qui finissent, au bout d'un temps plus ou moins long, par se disjoindre, en cédant à ces ébranlements répétés. L'expérience, qui fait connaître ces accidents, et la théorie qui enseigne les moyens de les calculer d'avance, sont les deux guides qui doivent diriger l'ingénieur mécanicien dans toutes les constructions qu'il est chargé de faire exécuter.

246. Le troisième principe est *le principe de la moindre quantité d'action*, qui a été trouvé par Maupertuis, et sur lequel il a publié deux Mémoires: l'un en 1744 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, et l'autre en 1746, dans ceux de l'*Académie de Berlin;* il a appliqué ce principe à la détermination des lois de la réfraction de la lumière, et à celle du choc des corps durs et des corps parfaitement élastiques. On a cherché à lui en contester la découverte, ce qui a donné lieu à de violentes discussions, qui n'ont rien produit qui puisse détruire ses droits; mais elles lui ont causé de cruels chagrins, à la suite desquels il a abandonné la carrière dans laquelle il pouvait encore rendre des services utiles aux sciences.

D'après Maupertuis, une quantité d'action est le produit de la masse d'un corps par sa vitesse et par l'espace qu'il a parcouru, et la loi qu'il a nommée principe de la moindre action, consiste en ce que si un système de corps éprouve un mouvement brusque, ou un choc, la quantité d'action qui aura lieu dans les corps de ce système, après le choc, sera un *minimum;* c'est-à-dire que cette quantité d'action sera la moindre possible.

Cette loi a été trouvée par le moyen des causes finales, ou par des principes métaphysiques. Carnot en a donné une démonstration géométrique dans l'ouvrage que nous avons cité; au lieu du produit de la masse par la vitesse et par l'espace parcouru, Carnot emploie le produit de la masse par le carré de la vitesse perdue; ce produit peut être remplacé par celui de la masse par le carré de la différence des vitesses avant et après le choc; alors le cas particulier du principe de la moindre action relatif au choc des corps, sera compris dans le théorème suivant :

Dans le choc des corps, la somme des produits de la masse de chacun de ces corps par le carré de la différence de sa vitesse, avant et après le choc, est un minimum.

Proposons-nous de résoudre, par le moyen de ce théorème, le problème du choc de deux corps imparfaitement élastiques.

Soient deux corps sphériques, dont m et m' représentent les masses, et qui vont se choquer dans la même direction, avec les vitesses v et v', suivant la ligne droite qui passe par leurs centres, leur élasticité étant à l'élasticité parfaite comme $n:1$; appelons u la vitesse commune des deux mobiles, au moment où la plus grande compression a lieu, et désignons par w, w' leurs vitesses après le choc; l'effet du choc fera perdre au premier, ou au corps choquant, la vi-

tesse $v - u + n(v-u) = (1+n)(v-u)$; la vitesse du corps choqué sera augmentée de $u - v' + n(u-v') = (1+n)(u-v')$, et par conséquent après le choc, ces mobiles auront les vitesses

$$w = v - (1+n)(v-u) = (1+n)u - nv,$$
$$w' = v' + (1+n)(u-v') = (1+n)u - nv';$$

en retranchant, membre à membre, la seconde équation de la première, on aura l'équation des vitesses relatives des mobiles

$$w - w' = -n(v-v').$$

Pour appliquer le principe de la moindre action à la recherche des vitesses de ces deux corps, après le choc, on aura

$$m(v-w)^2 + m'(v'-w')^2.$$

Cette quantité devant être un minimum, en la différentiant par rapport aux variables w et w' et égalant sa différentielle à zéro, il viendra

$$-m(v-w)\,dw + m'(w'-v')\,dw' = 0.$$

En différentiant l'équation des vitesses relatives, on trouve $dw = dw'$, ce qui fait disparaître les quantités différentielles de l'équation précédente, et la réduit à l'équation finie

$$-m(v-w) + m'(w'-v') = 0.$$

Les variables, ou les inconnues w, w', étant éliminées

entre cette équation et celle des vitesses relatives, on aura

$$w = \frac{mv - nm'v + nm'v' + m'v'}{m + m'} = \frac{(m - nm')v + (m' + nm')v'}{m + m'},$$

$$w' = \frac{mv + nmv + m'v' - nmv'}{m + m'} = \frac{(m + nm)v + (m' - nm)v'}{m + m'};$$

ce sont les formules que nous avons trouvées (236), pour la solution directe du même problème.

Il y a un quatrième principe qu'on a nommé *principe de la conservation des aires;* nous nous en occuperons dans un autre chapitre, en y appliquant l'analyse infinitésimale; cette analyse nous fournira aussi des moyens pour développer davantage la théorie du principe de la conservation des forces vives, que nous aurons plus tard l'occasion d'appliquer au calcul des machines.

CHAPITRE VI.

DE LA RÉSISTANCE DES FLUIDES, OU DES MILIEUX.

247. On appelle *milieux* les corps dans lesquels d'autres corps peuvent se mouvoir : tels sont l'eau et les autres liquides, l'air et les autres fluides aériformes; l'influence que ces milieux exercent sur le mouvement peut être envisagée de deux manières : lorsqu'un corps se meut dans un fluide, il doit vaincre la résistance que ce fluide lui oppose par son inertie, et chasser les molécules qui se trouvent devant sa surface antérieure; lorsque le fluide est en mouvement et le corps en repos, c'est celui-ci qui reçoit successivement le choc des molécules de fluide. On ne distingue aucune différence entre les effets de ces deux cas; nous nous occuperons particulièrement du premier.

Pour établir les lois de la résistance des fluides, on n'a rien trouvé de plus satisfaisant que le principe de la communication du mouvement dans le choc des corps; mais, pour appliquer ce principe, il a fallu suppléer, par les hypothèses que nous allons faire connaître, au peu de connaissance que nous avons sur la constitution des fluides et sur la manière dont ils agissent.

Soit ABCD (*fig.* 136) la section d'un cylindre droit qui se meut dans un liquide, ou dans un fluide aériforme, suivant la direction de son axe; représentons par m la masse de ce cylindre, et par S l'aire de sa base, ou de sa face antérieure, qui est un cercle dont le diamètre est BC.

Pendant l'instant dt, le cylindre parcourra le petit espace $Bb = dx$; en désignant sa vitesse par v, on aura $v = \frac{dx}{dt}$, et sa face autérieure S choquera tous les points du fluide compris dans le volume cylindrique dont $BbcC$ est une section; supposons ce volume divisé en tranches parallèles à la base S, de sorte que l'épaisseur de chaque tranche soit égale à celle de l'un des points du fluide; aussitôt que la surface antérieure S du mobile a choqué les points d'une tranche du fluide, ces points sont censés disparaître, la surface S avance et choque les points de la tranche suivante, qui disparaissent également, et il en est de même pour chacune des autres tranches; ce qui revient à supposer que le choc du mobile, contre les points du fluide, ne leur communique aucun mouvement qui puisse être transmis aux autres points, ou bien que les points du fluide s'anéantissent à mesure qu'ils ont été choqués par le mobile.

Désignons par δ la densité du fluide, la masse des molécules que renferme le volume cylindrique dont la base est S et la hauteur $Bb = dx$, sera $\delta S dx$.

Avant le choc, la vitesse du cylindre est v, et sa quantité de mouvement mv; après le choc, le cylindre et la masse de fluide qu'il a choquée ont la vitesse commune $v + dv$, et l'on a $(m + \delta S dx)(v + dv)$ pour la somme des quantités de mouvement; cette somme doit être égale à la quantité de mouvement du mobile avant le choc, ce qui donne

$$mv = (m + \delta S dx)(v + dv).$$

Les calculs étant effectués, en supprimant les termes qui se détruisent et celui qui est un infiniment petit du second

ordre, on aura

$$mdv = - \delta S v dx;$$

en substituant la valeur de $dx = vdt$, et divisant par dt, cette équation devient

$$m \frac{dv}{dt} = - \delta S v^2.$$

Le premier membre est composé du produit de la masse du mobile par la force accélératrice, c'est l'expression de la force motrice que la résistance du fluide oppose au mouvement du mobile; le second membre fait voir que cette force est proportionnelle à la densité du fluide, à l'aire de la face antérieure du mobile et au carré de sa vitesse.

Ce résultat est fondé sur un principe analogue à celui de la communication du mouvement dans le choc des corps sans ressort; si l'on supposait le mobile et le fluide parfaitement élastiques, on trouverait une force motrice double de celle que nous venons d'obtenir. Nous nous arrêterons à cette dernière force, qui est beaucoup plus grande que celle qu'on trouve par l'expérience.

Pour ramener à des mesures connues l'évaluation de la force motrice dans le choc des fluides, nous mettrons la valeur de $v^2 = 2gh$ dans le second membre de la dernière équation, ce qui donnera

$$m \frac{dv}{dt} = - 2g\delta S h;$$

on voit que ce second membre, qui exprime la valeur de la force motrice dans le choc d'un fluide, ou la pression qui ralentit le mobile, représente le poids d'un cylindre de ce fluide dont la base serait la face antérieure S du mobile, et qui au-

rait pour hauteur $2h$, ou le double de la hauteur dont un corps devrait tomber, dans le vide, pour acquérir une vitesse égale à celle de ce même mobile.

248. Il est facile de modifier la formule que nous venons de trouver, pour l'appliquer au choc oblique, c'est-à-dire au cas où la face antérieure du mobile forme un angle oblique avec la direction du mouvement.

Prenons $IL = v$ (*fig.* 137), sur le prolongement de l'axe du cylindre; décomposons cette vitesse, de manière que l'une des composantes IH agisse dans le plan de la face antérieure S du mobile, et que l'autre composante IK lui soit perpendiculaire; la première composante ne produit aucun effet sur la vitesse du mobile, et la seconde $IK = LH = v \sin CIL$.

Les angles KIL et CIL sont compléments l'un de l'autre; en désignant le premier de ces angles par i, on a $\cos i = \sin CIL$, et par conséquent si l'on met $v \cos i$ à la place de v, dans la formule du choc perpendiculaire, on aura

$$m\frac{d}{dt} = -\delta S v^2 \cos^2 i$$

pour la formule du choc oblique.

La force motrice, ou la résistance dirigée suivant KI, sera équivalente au poids d'un cylindre de fluide dont la base est S et la hauteur $2h \cos^2 i$.

249. Cherchons maintenant la formule qui exprime la résistance d'un fluide contre un mobile, que nous supposerons d'abord un solide quelconque de révolution; cette formule se déduit, de la manière suivante, de celle que nous venons de trouver pour la résistance d'une surface plane, qui fait un angle oblique avec la direction du mouvement.

Soit ADB (*fig.* 138) la courbe qui engendre la surface du mobile, en tournant autour de l'axe AB, que nous prendrons pour l'axe des abscisses; plaçons l'origine au point C, qui correspond à la plus grande ordonnée CD, et supposons que le mobile se meut dans la direction de cet axe, de sorte que la seule partie de sa surface qui choquera le fluide sera celle qui est décrite par l'arc DMB.

Abaissons des deux points infiniment proches M et M', pris sur cet arc, les ordonnées MP, M'P'; menons la normale MK, et les droites MH, M'L, parallèles à l'axe AB, et achevons le parallélogramme MM'HK; l'élément de courbe MM' $= ds$ étant considéré comme une ligne droite, l'angle HMM', complément de HMK, sera égal à MM'L; ainsi, en faisant l'angle HMK $= i$, nous aurons

$$\cos i = \sin \mathrm{MM'L} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MM'}} = \frac{dy}{ds}.$$

L'élément de courbe MM' $= ds$ décrit une zone, ou un tronc de cône, dont la surface $\mathrm{S} = 2\pi y ds$; la résistance du fluide agit suivant la normale à chaque point de cette surface; en la décomposant, de manière que l'une des composantes soit perpendiculaire et l'autre parallèle à l'axe AB du mobile, chaque composante perpendiculaire est détruite par celle qui lui correspond dans le sens opposé, et la composante parallèle à l'axe est le produit de la résistance normale par $\cos i$, ou $\frac{dy}{ds}$; ainsi, en mettant dans l'expression de la résistance normale à une surface plane, oblique à la direction du mouvement, les valeurs de S et de $\cos i$ que nous venons de déterminer, et multipliant par $\frac{dy}{ds}$, cette expression devient

$$\delta \,.\, 2\pi y ds v^2 \frac{dy^2}{ds^2} \,.\, \frac{dy}{ds} = 2\pi\delta v^2 y \frac{dy^3}{ds^2};$$

en désignant la résistance par R, on aura

$$R = 2\pi\delta v^2 \int y \frac{dy^3}{ds^2}:$$

c'est l'expression de la force motrice, ou de la force totale que le fluide oppose au mobile.

Pour appliquer cette formule à un exemple, nous prendrons la sphère; alors la courbe génératrice ADMB est un demi-cercle. En désignant le rayon par r, l'origine étant au centre C, nous aurons

$$y^2 = r^2 - x^2, \quad ydy = -xdx;$$

en élevant au carré les deux membres de l'équation différentielle, et substituant la valeur de x^2 prise dans la première équation, il vient

$$y^2dy^2 = (r^2 - y^2)\,dx^2.$$

Le triangle rectangle élémentaire MLM′ donne

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2}{r^2 - y^2} + dy^2 = \frac{r^2dy^2}{r^2 - y^2};$$

cette valeur étant substituée dans la formule générale, à la place de ds^2, l'intégrale devient

$$\int \frac{ydy^3}{ds^2} = \int \frac{ydy^3(r^2 - y^2)}{r^2dy^2} = \int \frac{r^2ydy - y^3dy}{r^2};$$

en intégrant, et faisant ensuite $y = r$, pour avoir l'intégrale dans toute l'étendue de la demi-sphère antérieure, la seule partie de sa surface qui choque le fluide, on aura

$$\int \frac{r^2ydy - y^3dy}{r^2} = \frac{\frac{1}{2}r^2y^2 - \frac{1}{4}y^4}{r^2} = \frac{1}{4}r^2.$$

Donc une sphère qui se meut dans un fluide éprouve une résistance qui a pour expression

$$R = 2\pi\delta v^2 \frac{1}{4} r^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 \delta v^2 ;$$

c'est-à-dire que cette résistance est la moitié de celle qu'éprouverait la surface d'un grand cercle de la sphère, perpendiculairement à la direction du mouvement, ou le cylindre qui lui serait circonscrit : en effet, on voit que ce résultat est la moitié de celui que nous avons trouvé pour la résistance du cylindre.

La masse du mobile étant représentée par m, si l'on désigne sa densité par D, on aura

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 D;$$

ces deux dernières équations étant divisées l'une par l'autre, elles donnent l'équation suivante

$$\frac{R}{m} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 \delta v^2}{\frac{4}{3}\pi r^3 D} = \frac{3}{8} \frac{\delta}{D} \cdot \frac{v^2}{r} ;$$

le second membre est l'expression de la force retardatrice que le fluide oppose au mobile.

C'est Newton qui a indiqué le premier ce résultat théorique, et nous avons vu (212) que, d'après ses expériences sur la chute des corps abandonnés à l'action de la pesanteur dans l'air, la résistance de ce fluide n'est que la moitié de celle que nous venons de trouver.

CHAPITRE VII.

DU MOUVEMENT CURVILIGNE.

250. Les lois du mouvement rectiligne ont été établies dans les chapitres précédents, et nous les avons éclaircies en les appliquant à la résolution des principaux problèmes de la Dynamique qui en dépendent. Nous allons maintenant chercher les conditions qui doivent être remplies pour produire le mouvement *curviligne,* ou pour faire décrire une ligne courbe à un mobile; cette courbe se nomme la *trajectoire* du mobile qui la décrit.

Une seule force appliquée à un corps, ne peut lui imprimer qu'un mouvement rectiligne, et il en serait de même si un corps était soumis à l'action de plusieurs forces agissant dans la même direction, ou en sens contraire, suivant une même ligne droite; ainsi, pour produire un mouvement curviligne, il faut la combinaison de plusieurs forces, qui agissent suivant des directions différentes.

Pour expliquer le passage du mouvement rectiligne au mouvement curviligne, nous considérerons un mobile, ou un simple poiut matériel, qui est mis en mouvement par l'action instantanée d'une force, ou par un choc, et qui reçoit successivement plusieurs autres chocs qui changent sa direction; nous supposerons d'abord que toutes ces forces agissent dans un même plan.

Un point matériel, ou un mobile dont la masse m peut

être considérée comme concentrée à son centre de gravité, étant placé au point A (*fig.* 132), supposons qu'il soit mis en mouvement par une force P, qui lui donne une impulsion suivant la ligne droite AP, et qu'au point B de cette droite, le mobile reçoive, d'une autre force Q, une impulsion telle, que si elle existait seule, elle lui ferait parcourir, dans la direction BQ, la distance B*b*, pendant le temps qu'il mettrait à parcourir B*d*, suivant sa direction primitive. Achevons le parallélogramme B*b*C*d*, dont les deux côtés adjacents B*d*, B*b*, sont les longueurs, ou les espaces, que les forces P et Q feraient parcourir au mobile pendant le même temps; la diagonale BC de ce parallélogramme sera la nouvelle direction du mobile, et il parcourra la longueur de cette diagonale dans le même temps que les forces P et Q lui auraient fait parcourir les côtés B*d* et B*b* : en effet, les forces sont proportionnelles aux vitesses, et il en résulte, comme nous l'avons prouvé (**206**), que la règle du parallélogramme des vitesses est la même que celle du parallélogramme des forces; ainsi la diagonale BC représente, en grandeur et en direction, la résultante R des vitesses que les forces P et Q ont imprimées au mobile, et cette vitesse résultante est uniforme, comme celles de ses composantes.

Après avoir parcouru la diagonale BC, le mobile reçoit l'impulsion d'une force S, suivant la direction CS; et si le mobile était en repos il parcourrait, avec la vitesse que lui a imprimée cette dernière force, l'espace C*c*, dans un temps égal à celui qu'il met à parcourir, sur le prolongement de la diagonale BC, la distance C*e*, avec la vitesse que lui a communiquée la résultante R des forces P et Q.

En achevant le parallélogramme C*c*D*e*, et menant la diagonale CD, cette diagonale sera, en grandeur et en direc-

tion, la résultante U des vitesses imprimées au mobile par R et S, ou par les forces P, Q et S.

Lorsque le mobile est à l'extrémité D de la diagonale CD, si une force V, agissant suivant la droite DV, lui communique une vitesse qui lui ferait parcourir la partie Dk de cette droite, pendant qu'il parcourrait Dh sur le prolongement de la diagonale CD, on formera le parallélogramme DkEh, dont la diagonale DE, ou la résultante W, des forces U et V, sera la ligne que les actions simultanées des forces U et V feront parcourir au mobile.

D'après ces constructions graphiques, on voit qu'un nombre quelconque de forces P, Q, S, V, etc., appliquées successivement au mobile m, suivant des directions différentes, font décrire à ce mobile la portion de polygone BCDE etc., et qu'après avoir parcouru le dernier côté, ou la dernière diagonale, il continuera à se mouvoir suivant son prolongement avec la vitesse que lui a communiquée la résultante de toutes les forces qui ont successivement modifié sa direction.

Le mouvement du mobile m est uniforme sur chaque côté du polygone qu'il décrit, mais chaque impulsion qu'il reçoit change en même temps sa direction et sa vitesse, de sorte que tous les côtés du polygone ABCDE etc., sont décrits avec des vitesses différentes.

251. Le procédé graphique que nous venons d'expliquer ne peut servir que pour donner un aperçu de la formation du mouvement curviligne; on détermine d'une manière plus simple les circonstances de ce mouvement par le moyen des projections, en y appliquant la méthode des coordonnées dont nous avons déjà fait usage (**34**), pour la composition des forces.

Prenons le point A (*fig.* 132) pour le point de départ du mobile m, ou pour l'origine de son mouvement, et par ce point menons les deux axes rectangulaires AX, AY.

Représentons par P, P′, P″, etc., les intensités des forces qui font parcourir successivement au mobile m, les côtés AB, BC, CD, etc., du polygone qu'il décrit; chacune de ces forces peut être décomposée en deux autres, qui agissent parallèlement aux axes, de manière que l'une des composantes soit dirigée suivant l'axe des x, et l'autre suivant l'axe des y.

Menons les coordonnées Bp, Bq; Cp', Cq'; Dp'', Dq'', etc., et désignons par α, β; α', β'; α'', β'', etc.; les angles que les côtés du polygone, ou les directions du mobile, font avec les axes ou avec les coordonnées qui leur sont parallèles; les composantes des forces suivant les axes seront

$$\begin{aligned} &P\cos\alpha, \quad P'\cos\alpha', \quad P''\cos\alpha'', \text{ etc.,} \\ &P\cos\beta; \quad P'\cos\beta', \quad P''\cos\beta'', \text{ etc.;} \end{aligned}$$

et en désignant leurs sommes par X et Y, nous aurons

$$\begin{aligned} X &= P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.,} \\ Y &= P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Pendant que les côtés AB, BC, CD, etc., sont décrits par le mobile m, ses projections décrivent Ap, pp', $p'p''$, etc., sur l'axe des x, et Aq, qq', $q'q''$, etc., sur l'axe des y; chaque côté du polygone, et ses projections sur les axes, sont décrits dans le même temps, mais le mouvement de la projection, sur l'un des axes, a lieu comme si la projection correspondante sur l'autre axe n'existait pas; ce qui provient de ce que le mouvement d'un mobile, quelle que soit sa direction, ne peut éprouver aucune altération par l'effet d'un

autre mobile qui se meut perpendiculairement à sa direction, et cette direction pourrait être transportée dans l'espace, parallèlement à elle-même, sans occasionner de changement dans le mouvement du mobile. D'ailleurs on voit que l'indépendance des mouvements des projections est indiquée par les équations précédentes, puisque chacune de ces équations est composée des termes relatifs à la projection sur l'axe auquel elle se rapporte, et qu'elle ne renferme rien de ce qui concerne la projection sur l'autre axe.

Les longueurs des côtés du polygone décrit par le mobile m, dépendent des intervalles de temps qui s'écoulent entre les actions des forces qui agissent successivement sur le mobile. Les côtés de ce polygone seront très petits si les actions des forces se succèdent rapidement; alors, au lieu d'un polygone, on aura une ligne courbe pour la trajectoire du mobile.

252. Si un mobile M, que nous considérerons comme ayant l'unité de masse, ou comme un point matériel entièrement libre, est mis en mouvement dans l'espace, par les impulsions qu'il reçoit successivement de plusieurs forces P, P′, P″, etc., il décrira un polygone gauche, dont le contour dépendra des directions suivant lesquelles les forces agissent; lorsque les côtés sont infiniment petits, le contour du polygone devient une courbe: c'est la trajectoire du mobile, qui est en général une courbe à double courbure; on déterminera cette trajectoire en rapportant la position instantanée du mobile à trois plans fixes, qui se coupent suivant trois axes rectangulaires AX, AY, AZ (*fig.* 133), que l'on nomme les axes des coordonnées x, y et z du mobile.

Supposons que la ligne droite AB, qui passe par l'origine A des plans coordonnés, soit la direction que suit le mobile,

en obéissant à l'impulsion qu'il a reçue de la force P; menons par le point m de cette droite les trois plans $mm'qm''$, $mpp''m''$, $mpp'm'$, respectivement parallèles aux plans coordonnés des xy, xz et yz; joignons mp', mp'' et mq, et désignons par α, β, γ, les angles $m\mathrm{A}p'$, $m\mathrm{A}p''$ et $m\mathrm{A}q$ formés par la droite AB, avec les axes des x, y et z; en prenant $\mathrm{A}m$ pour représenter la force P, et observant que cette droite est la diagonale du parallélipipède $pp''\mathrm{A}p'm'mm''q$, on verra que la force P peut être regardée comme ayant pour composantes trois forces représentées en grandeur et en direction par les côtés $\mathrm{A}p'$, $\mathrm{A}p''$, $\mathrm{A}q$, ou par les expressions suivantes des valeurs de ces mêmes côtés :

$$\mathrm{P}\cos\alpha, \quad \mathrm{P}\cos\beta, \quad \mathrm{P}\cos\gamma.$$

Pour changer la direction rectiligne et la vitesse imprimée au mobile M, il faut qu'il soit soumis à d'autres forces P′, P″, etc, dont les directions soient différentes de celle qu'il a reçue de la force P; si l'on désigne par α', β', γ'; α'', β'', γ'', etc., les angles formés par les directions des forces P′, P″, etc., avec les axes des x, y et z, on aura pour leurs composantes parallèles à ces axes

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}'\cos\alpha', & \mathrm{P}'\cos\beta', & \mathrm{P}'\cos\gamma', \\ \mathrm{P}''\cos\alpha'', & \mathrm{P}''\cos\beta'', & \mathrm{P}''\cos\gamma'', \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

En appelant X, Y et Z, les sommes des composantes des forces P, P′, P″, etc., respectivement parallèles aux axes des x, y et z, on aura les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{P}'\cos\alpha' + \mathrm{P}''\cos\alpha'' + \text{etc.}, \\ \mathrm{Y} &= \mathrm{P}\cos\beta + \mathrm{P}'\cos\beta' + \mathrm{P}''\cos\beta'' + \text{etc.}, \\ \mathrm{Z} &= \mathrm{P}\cos\gamma + \mathrm{P}'\cos\gamma' + \mathrm{P}''\cos\gamma'' + \text{etc.}; \end{aligned}$$

chacune de ces équations se rapporte à la projection du mobile sur l'axe correspondant.

Les raisonnements par lesquels nous avons fait voir l'indépendance qui existe entre les mouvements des projections du mobile sur deux axes situés dans un plan, s'appliquent aux mouvements des projections sur trois axes perpendiculaires entre eux, d'où il résulte que chaque projection du mobile, sur l'un des axes, se meut suivant cet axe comme si les projections sur les deux autres axes n'existaient pas.

Cette indépendance, entre les mouvements suivant les axes, a lieu quel que soit le mouvement du mobile, soit que des forces lui fassent décrire un polygone, par leurs impulsions successives et instantanées, soit que sa trajectoire soit une ligne courbe, produite par les actions combinées d'une force dont l'action est instantanée, avec une ou plusieurs forces accélératrices.

Le mouvement curviligne d'un mobile est donc ramené aux mouvements rectilignes de ses projections suivant trois axes fixes, perpendiculaires entre eux, dans le cas général, où la trajectoire de ce mobile est une courbe à double courbure; lorsque la trajectoire est une courbe plane, le mouvement du mobile est déterminé par les mouvements de ses projections sur deux axes rectangulaires, menés dans le plan de cette courbe.

253. Nous sommes parvenus, par de simples considérations fondées sur les principes de la Géométrie analytique, aux conséquences remarquables qui viennent d'être exposées, sur la décomposition du mouvement curviligne en mouvements rectilignes, et sur l'indépendance qui existe entre ces derniers mouvements. Nous allons maintenant chercher les équations différentielles dont nous aurons besoin pour la

résolution de quelques-uns des principaux problèmes qui dépendent de ces combinaisons de mouvements.

Supposons qu'au bout d'un temps quelconque t, le mobile M soit au point m, dont les coordonnées sont x, y et z, et que les forces par lesquelles il est sollicité lui fassent parcourir le petit espace mc, ou l'élément ds de sa trajectoire pendant l'élément de temps dt: sa vitesse sera exprimée par $\frac{ds}{dt}$, et l'on aura $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, pour les projections de cette vitesse sur les axes des coordonnées x, y et z, ou pour ses composantes suivant ces mêmes axes. Chaque projection est indépendante des deux autres, comme nous l'avons vu dans les observations précédentes.

Au bout du temps $t+dt$, la vitesse $\frac{dx}{dt}$, de la projection du mobile M sur l'axe des x, devient $\frac{dx}{dt}+d.\frac{dx}{dt}$; c'est-à-dire que pendant l'instant dt, cette vitesse augmente de la quantité $d\,\frac{dx}{dt}$, ou $\frac{d^2x}{dt}$, puisque l'élément de temps dt est supposé constant.

L'équation générale de la vitesse $v=\frac{dx}{dt}$ donne $dv=\frac{d^2x}{dt}$; en mettant X à la place de φ, dans la formule $dv=\varphi dt$ (**208**), on voit que l'accroissement $\frac{d^2x}{dt}$ est égal à la vitesse Xdt, produite par la résultante totale X, pendant l'instant dt, ce qui donne l'équation

$$\frac{d^2x}{dt}=\mathrm{X}dt.$$

Le même raisonnement étant appliqué aux projections $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, sur les axes des y et des z, les vitesses suivant ces axes donneront

$$\frac{d^2y}{dt}=\mathrm{Y}dt,\quad \frac{d^2z}{dt}=\mathrm{Z}dt.$$

En divisant par dt, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Ces équations, ou ces formules générales du mouvement curviligne, sont les formules de trois mouvements rectilignes; elles se réduisent à deux lorsque le mobile se meut dans un plan, ou lorsque sa trajectoire est une courbe plane.

En multipliant chacune de ces trois équations par l'une des coordonnées qu'elle ne renferme pas, savoir : la première par y et la deuxième par x; la troisième par x et la première par z; la troisième par y et la deuxième par z; prenant ensuite la différence de chaque couple de produits, il viendra

$$\left.\begin{aligned}\frac{yd^2x-xd^2y}{dt}&=(Xy-Yx)\,dt,\\ \frac{xd^2z-zd^2x}{dt}&=(Zx-Xz)\,dt,\\ \frac{zd^2y-yd^2z}{dt}&=(Yz-Zy)\,dt.\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

Soit Am la ligne droite qui représente, en grandeur et en direction, la force unique, ou la résultante de toutes les forces appliquée au mobile M; les composantes X, Y, Z, de cette force, seront représentées par les côtés Ap', Ap'', Aq, du parallélipipède $Ap''pp'm'mm''q$, dont Am est la diagonale, ou par les coordonnées x, y, z, du point m, et l'on aura

$$X:Y:Z::x:y:z,$$

ce qui donne

$$Xy=Yx, \quad Xz=Zx, \quad Yz=Zy;$$

d'où il résulte que les seconds membres des équations précédentes sont nuls; leurs premiers membres sont les différentielles de $\frac{ydx-xdy}{dt}$, $\frac{xdz-zdx}{dt}$, $\frac{zdy-ydz}{dt}$. En désignant les constantes par c, c', c'', ces trois équations deviennent

$$ydx-xdy=cdt,\quad xdz-zdx=c'dt,\quad zdy-ydz=c''dt. \qquad (b)$$

254. Pour expliquer la construction géométrique de ces formules, nous considérerons seulement la projection sur le plan des xy, de la trajectoire décrite par le mobile; alors la composante $Z=0$, on a aussi $z=0$, et il ne reste que la première équation $ydx-xdy=cdt$; cette équation est l'expression analytique du théorème suivant.

Le mobile étant soumis à l'action d'une seule force, si cette force est constamment dirigée vers un centre fixe, la droite menée de ce centre au mobile, ou son rayon vecteur, décrira, par son mouvement autour de ce même centre, des secteurs dont les aires seront proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Nous observerons d'abord que si un mobile, ou un corps entièrement libre, dont nous ferons abstraction du volume, en supposant sa masse concentrée à son centre de gravité, est mis en mouvement par un choc, ou par une impulsion instantanée, et qu'il soit soumis à l'action continue d'une force accélératrice qui émane d'un centre fixe, la trajectoire décrite par ce mobile sera une courbe plane, située dans le plan qui passe par le centre fixe A (*fig.* 134), et par deux positions successives M et M' du mobile. En effet, tout étant semblable de part et d'autre de ce plan, il n'y a pas de raison pour que le mobile s'en écarte plutôt d'un côté que de l'autre.

Le centre fixe A étant à l'origine des axes rectangulaires AX, AY, soit DEM la trajectoire décrite par le mobile au bout du temps t, dans le plan de ces axes; menons au point M où se trouve le mobile, le rayon vecteur AM, et l'ordonnée MP; après le temps $t+dt$, le mobile sera au point M′, et pendant l'instant dt il aura décrit le petit arc MM′, ou l'élément ds de sa trajectoire. Menons le rayon vecteur AM′, l'ordonnée M′P′, la droite MH parallèle à l'axe AX, et joignons AH; ces constructions donnent

$$\text{secteur AEM} = \text{segment AEMP} - \text{triangle AMP}.$$

En négligeant le triangle MHM′, qui est un infiniment petit du second ordre, on a le rectangle $\text{MP} \times \text{PP}' = ydx$, pour la différentielle du segment AEMP; le triangle $\text{AMP} = \frac{1}{2}xy$, et en différentiant,

$$d.tr.\,\text{AMP} = \tfrac{1}{2}d.xy = \tfrac{1}{2}ydx + \tfrac{1}{2}xdy.$$

Les différentielles du segment AEMP et du triangle AMP, étant remplacées par les expressions que nous venons de trouver, en indiquant l'intégrale, on aura

$$\text{secteur AEM} = \tfrac{1}{2}\int(ydx - xdy);$$

on a d'ailleurs l'équation différentielle $ydx - xdy = cdt$, d'où l'on tire $\int(ydx - xdy) = ct$; et en substituant cette intégrale, le résultat que nous venons de trouver devient

$$\text{secteur AEM} = \tfrac{1}{2}ct.$$

Il n'y a point de constante à ajouter, parce que les valeurs secteur AEM $=0$ et $t=0$, ont lieu en même temps.

Donc l'aire du secteur décrit par le rayon vecteur du mobile, autour du centre fixe, est proportionnelle au temps employé à le décrire.

C'est dans cette proposition que consiste le principe qu'on a nommé *Principe de la conservation des aires*.

255. Pour faciliter les calculs, dans les applications de ce théorème, on fait usage de coordonnées polaires, comme nous le verrons plus loin, et par conséquent il est nécessaire de connaître la valeur du secteur élémentaire AMM′, exprimé par le moyen de ces coordonnées.

Soient x l'abscisse et y l'ordonnée du mobile, lorsqu'il est au point M; désignons par r le rayon vecteur AM, et par u l'angle MAX qu'il forme avec l'axe des x; l'angle formé par le rayon vecteur AM′ avec le même axe sera

$$\text{MAX} - \text{MAM}' = u - du,$$

et l'on aura, pour les composantes suivant les axes:

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u;$$

en prenant les différentielles, et observant qu'ici la différentielle du est négative, on trouve

$$dx = \cos u dr + r\sin u du, \quad dy = \sin u dr - r\cos u du.$$

Ces équations différentielles étant combinées avec les deux précédentes, et les réductions étant effectuées, il viendra

$$y dx - x dy = r^2 du;$$

en comparant cette équation à la première équation (b), on voit que les premiers membres sont identiques, et les seconds membres donnent

$$r^2du = cdt.$$

Cette expression du secteur élémentaire AMM′, en coordonnées polaires, se déduit facilement de la construction géométrique suivante.

Du point fixe A comme centre, et avec le rayon $AM = r$, décrivons l'arc de cercle MN, qui coupe au point N le rayon vecteur AM′; le triangle MNM′ est un infiniment petit du second ordre que nous pouvons négliger; alors le secteur élémentaire se confondra avec le secteur $AMN = \frac{1}{2} r \times \text{arc MN}$; d'ailleurs l'angle MAN, ou l'arc qui mesure cet angle, et qui a l'unité pour rayon, est égal à du; donc

la longueur de l'arc $MN = rdu$,
et l'aire du secteur $AMN = \frac{1}{2} r \times rdu = \frac{1}{2} r^2du.$

On exprime par $v = \frac{ds}{dt}$ la vitesse d'un mobile, à un point quelconque M de sa trajectoire; c'est-à-dire que la vitesse, dans le mouvement curviligne, est représentée par le quotient de l'élément de la courbe que le mobile décrit divisé par l'élément du temps, ce qui est analogue à l'expression analytique de la vitesse d'un mobile qui se meut en ligne droite (**207**). On concevra cette analogie, en considérant la trajectoire, ou la courbe que décrit le mobile, comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et supposant que la force accélératrice qui agit sur le mobile cesse de varier pendant l'instant dt, employé à parcourir

chacun de ces côtés; d'après cette hypothèse, le mobile décrira chaque côté de la courbe polygonale avec un mouvement uniforme.

Si la force accélératrice qui imprime au mobile un mouvement curviligne, en le contraignant à décrire la courbe qui forme sa trajectoire, cessait tout à coup d'agir sur ce mobile lorsqu'il est au point M; alors, l'inertie du mobile ne lui permettant pas de changer la vitesse qu'il a acquise, il continuerait à se mouvoir avec cette vitesse suivant la direction de la tangente MT, ou suivant le prolongement du dernier côté de la courbe polygonale.

Les composantes de la vitesse d'un mobile sont les projections de cette vitesse sur les axes auxquels sa trajectoire est rapportée.

Soit $mc = ds$ (*fig.* 133) l'espace parcouru par le mobile, pendant l'instant dt, ou l'élément de la trajectoire qu'il décrit dans l'espace; les composantes, ou les projections de sa vitesse, sur les axes des x, des y et des z, seront $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; et en observant que les triangles rectangles mdc, pkn, donnent

$$\overline{mc}^2 = \overline{md}^2 + \overline{dc}^2 = \overline{pk}^2 + \overline{nk}^2 + \overline{dc}^2,$$

on aura

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}.$$

256. Les trois formules

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

peuvent être transformées en une seule équation, de la manière suivante.

En multipliant la première formule par $2dx$, la deuxième

par $2dy$, la troisième par $2dz$, et ajoutant les produits, il viendra

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y + 2dzd^2z}{dt^2} = 2(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Le premier membre de cette équation est la différentielle de $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$, ou, d'après la formule de l'article précédent, celle de v^2; en substituant cette dernière valeur, on aura

$$d.v^2 = 2(Xdx + Ydy + Zdz),$$

et en intégrant,

$$v^2 = \text{const.} + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz).$$

La constante est la vitesse dont le mobile était animé lorsque les forces accélératrices X, Y, Z, ont commencé à agir; en la représentant par U^2, et la faisant passer dans le premier membre, l'équation devient

$$v^2 - U^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (c)$$

Il existe un cas très étendu, dans lequel le second membre de cette équation est une différentielle exacte: c'est celui où la force accélératrice est dirigée vers un centre fixe Nous avons déjà vu que lorsqu'un mobile est assujetti à tourner autour de ce centre, on obtient directement l'intégrale; pour en donner une autre application très simple, nous allons chercher la solution du problème suivant.

Un mobile, que nous considérerons comme un point matériel, étant lancé verticalement de bas en haut, avec la vitesse U, on demande à quelle hauteur il s'élèvera, en sup-

posant que la pesanteur, qui détruit successivement sa vitesse initiale, soit une force retardatrice constante, et faisant abstraction de la résistance de l'air.

Le point supposé fixe, vers lequel la pesanteur est dirigée, est le centre de la Terre; si l'on imagine une ligne droite qui passe par ce centre et par le centre de gravité du mobile, cette droite, que nous prendrons pour l'axe des x, sera la verticale suivant laquelle le mobile se meut; les composantes parallèles aux deux autres axes sont nulles, c'est-à-dire qu'on a $Y=0$, $Z=0$, et l'équation devient

$$v^2 - U^2 = 2\int X dx;$$

en mettant à la place de X la quantité $-g$, qui représente la force accélératrice constante de la pesanteur prise négativement, parce que son action détruit successivement la vitesse initiale du mobile, et intégrant, on aura

$$v^2 - U^2 = -2gx, \quad x = -\frac{v^2 - U^2}{2g} = \frac{U^2 - v^2}{2g}.$$

Cette formule est celle que nous avons trouvée (193), pour la solution du même problème; en la combinant avec la formule $v = \frac{dx}{dt}$, qui a lieu pour toute espèce de mouvement, on en déduit les deux autres formules principales du mouvement uniformément varié.

Nous n'avons considéré qu'un mobile, réduit à un point matériel qui a l'unité de masse, et soumis à l'action d'une seule force accélératrice; dans le cas général où plusieurs mobiles, et les forces qui leur sont appliquées, forment un système, ou une machine, en nommant m la masse de cha-

cun des mobiles, et désignant par la caractéristique S la somme de ceux que chaque terme de l'équation renferme, l'équation (*c*) deviendra

$$\mathrm{S}mv^2 - \mathrm{S}m\mathrm{U}^2 = 2\int \mathrm{S}\,(m\mathrm{X}dx + m\mathrm{Y}dy + m\mathrm{Z}dz).$$

Le principe de la conservation des forces vives, que nous avons déjà reconnu (**241**) dans le choc des corps parfaitement élastiques, est exprimé d'une manière beaucoup plus générale dans l'équation précédente; mais pour simplifier cette équation, et pour la rendre plus facilement applicable au calcul des machines, on donne à son second membre une autre forme, que l'on obtient par les opérations suivantes.

Soient P l'une des forces appliquées au système; AB (*fig.* 135) la ligne droite qui représente cette force, et $\mathrm{BC} = ds$ l'espace parcouru par son point d'application pendant l'instant dt; menons les trois axes rectangulaires AX, AY, AZ, et joignons AC.

Le parallélipipède dont AC est la diagonale, a pour côtés $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, et par conséquent nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2 &= (x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\,(xdx + ydy + zdz).\end{aligned}$$

En menant du point C, la perpendiculaire CD sur AB, ou sur son prolongement, le triangle rectangle ADC donnera

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 &= (\mathrm{AB} + \mathrm{BD})^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - \overline{\mathrm{BD}}^2 \\ &= \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 + 2\mathrm{AB} \times \mathrm{BD};\end{aligned}$$

les droites AB et BC peuvent être considérées comme les dia-

gonales de deux parallélipipèdes dont les côtés sont les coordonnées x, y, z, et dx, dy, dz; en remplaçant les carrés des diagonales de ces parallélipipèdes par les carrés de leurs côtés, et la droite AB par la force P, qui lui est proportionnelle, et substituant dp à la projection BD de BC sur la direction de la force P, on aura

$$\overline{AC}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2Pdp;$$

cette valeur de $\overline{AC}^2$, et la valeur précédente de la même quantité, ne diffèrent l'une de l'autre que par les derniers termes, qui doivent être égaux entre eux, ce qui donne

$$xdx + ydy + zdz = Pdp.$$

Les coordonnées x, y et z, peuvent être remplacées par les composantes mX, mY, mZ, de la force P, et cette dernière équation deviendra

$$mXdx + mYdy + mZdz = Pdp.$$

Si l'on désigne une autre force du système par Q, en supposant qu'elle agisse suivant une direction opposée à celle de la force P, on trouvera, par des opérations semblables à celles que nous venons de faire,

$$mXdx + mYdy + mZdz = -Qdq.$$

Toutes les forces du système étant ainsi partagées en deux groupes, qui agissent l'un dans un sens, et l'autre dans le sens opposé, l'équation générale des forces aura la forme suivante

$$Smv^2 - SmU^2 = 2\int SPdp - 2\int SQdq.$$

Les deux termes du premier membre sont les sommes des forces vives de tous les corps du système, à un instant quelconque, et à l'origine du mouvement; la différence de ces deux sommes est indépendante des courbes décrites par les mobiles pendant le temps t, pour passer de leurs positions initiales à celles qu'ils occupent au bout de ce temps.

Il résulte de cette loi générale du mouvement, ou du principe de la conservation des forces vives, dont l'équation précédente renferme l'expression, que si le système occupe la même position à deux époques différentes, les forces vives des mobiles qui le composent seront les mêmes à ces deux époques, quels que soient les chemins qu'ils auront parcourus.

Cette équation sera appliquée plus loin; nous ferons connaître, par des exemples, la manière de s'en servir pour calculer les effets que peuvent produire des forces données, en les employant à faire mouvoir des machines.

CHAPITRE VIII.

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES.

257. On nomme *projectile* un corps mis en mouvement par une force dont l'action est instantanée, et abandonné ensuite à l'action continue de la pesanteur.

Le problème du mouvement des projectiles renferme la théorie des armes à feu, qui ont pour moteur l'explosion de la poudre; ce problème, qui consiste à déterminer la route que suit le projectile, n'a été résolu, pour le cas purement hypothétique, qu'après la découverte des lois du mouvement dans la chute des corps; il fallait, pour en trouver la solution, combiner le mouvement uniforme, que la force d'impulsion communique au projectile, avec le mouvement uniformément varié qui lui est imprimé par la pesanteur; c'est ce que Galilée a fait, et en 1638 il a publié cette découverte dans l'un de ses Dialogues.

Nous nous occuperons seulement, dans ce chapitre, du mouvement des projectiles en usage dans l'artillerie, et nous prendrons pour exemple le boulet lancé par la force produite par l'explosion d'une charge de poudre renfermée dans l'âme d'un canon.

Pour résoudre ce problème nous supposerons d'abord, suivant l'hypothèse de Galilée, que le mouvement a lieu dans

le vide, c'est-à-dire que nous ferons abstraction de la résistance que l'air oppose au mouvement du projectile; nous chercherons ensuite la solution générale du problème, en y faisant entrer la résistance de l'air.

Les boulets, ou projectiles de guerre, sont ordinairement en fonte de fer; nous supposerons leur densité uniforme et leur forme exactement sphérique : alors le centre de gravité coïncidera avec le centre de figure, et le mouvement de ce centre sera le même que celui du projectile.

Soit A le point de départ du projectile, lancé suivant la droite AL (*fig.* 139) avec la vitesse initiale u; ce projectile est soumis à l'action de la pesanteur, qui lui fait parcourir verticalement l'espace $g = 9^m,8089$ pendant l'unité de temps, ou pendant une seconde; par la composition de sa vitesse initiale et de celle que lui communique la pesanteur, il décrira, dans le plan vertical mené par la droite AL, la courbe AMB.

Pour déterminer cette courbe, qu'on nomme la trajectoire du projectile, menons, dans son plan, deux axes rectangulaires AX, AY, qui se coupent au point A, de manière que le premier de ces axes soit horizontal et le second vertical.

Au bout du temps t, soit N le point où se trouverait le projectile, s'il n'avait été soumis qu'à l'action de la force qui lui a communiqué la vitesse initiale u; soit M le point où il a été transporté, au bout du même temps, par l'action simultanée de cette force avec la pesanteur; menons par le point M, une parallèle à la droite AL, qui rencontre au point Q l'axe vertical AY, suffisamment prolongé.

Rapportons la trajectoire aux axes obliques AY', AL; le point M de cette courbe sera déterminé par l'abscisse $AQ = MN = x'$, et par l'ordonnée $QM = AN = y'$.

L'abscisse x' exprime l'espace vertical que la pesanteur fait parcourir au projectile pendant le temps t; ainsi l'on a $x' = \frac{1}{2}gt^2$, et au bout du même temps l'ordonnée $y' = ut$: c'est l'espace que le projectile aurait parcouru en obéissant à la seule impulsion de la force par laquelle il a été mis en mouvement.

En élevant cette dernière équation au carré, et la divisant ensuite par l'équation précédente, il vient

$$\frac{y'^2}{x'} = \frac{u^2}{\frac{1}{2}g}, \quad y'^2 = \frac{2u^2}{g}x';$$

si l'on représente par h la hauteur due à la vitesse initiale u du projectile, on aura

$$u^2 = 2gh, \quad y'^2 = 4hx'.$$

On voit par ce résultat, que le carré de l'ordonnée est égal au produit de l'abscisse qui lui correspond multipliée par une ligne constante; d'où il résulte que la trajectoire AMB est une parabole.

Nous allons transformer cette dernière équation, pour rapporter la trajectoire aux axes rectangulaires AX, AY, dont le premier est horizontal.

Soit $XAL = \alpha$ l'angle formé par la droite AL, suivant laquelle le projectile a été lancé, et l'axe horizontal AX; du point M de la trajectoire, abaissons la perpendiculaire MP sur cet axe; le point M aura pour coordonnées rectangulaires $AP = x$ et $PM = y$; l'ordonnée y étant prolongée, elle coupe la droite AL au point N, et le triangle rectangle APN donne

$$NP = x \operatorname{tang} \alpha, \quad x' = NP - MP = x \operatorname{tang} \alpha - y;$$

$$y'^2 = x^2 + x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = x^2 \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}.$$

En substituant ces valeurs à la place des coordonnées obliques x' et y', on aura

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} = 4h(x \operatorname{tang}\alpha - y),$$

ou bieu

$$y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}.$$

C'est l'équation de la parabole, ou de la trajectoire dans le vide, rapportée à des axes rectangulaires qui se coupent au point d'où part le projectile.

En faisant $x = 0$, on a $y = 0$, et si l'on fait $y = 0$, on aura

$$x = 0, \quad x = 4h \operatorname{tang}\alpha \cos^2\alpha = 4h \sin\alpha\cos\alpha;$$

le produit $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, et par conséquent

$$x = 2h \sin 2\alpha = \mathrm{AB}.$$

On appelle *amplitude du jet*, cette distance AB, comprise entre les deux points où la trajectoire coupe l'axe horizontal AX.

La plus grande hauteur verticale à laquelle s'élève le projectile, se nomme la *hauteur du jet;* son abscisse, qui est la moitié de l'amplitude, a pour expression

$$x = h \sin 2\alpha = 2h \sin\alpha\cos\alpha = \mathrm{AD};$$

en la substituant dans l'équation de la trajectoire, on trouve l'ordonnée qui mesure cette hauteur

$$y = h \sin^2\alpha = \mathrm{CD}.$$

Si, dans les deux équations précédentes, on change x en y

et réciproquement, en divisant le carré de la première équation par la secoude, on aura

$$y^2 = 4hx \cos^2 \alpha.$$

Cette dernière équation est l'équation de la parabole rapportée à son sommet C, les abscisses étant prises sur l'axe CD; le coefficient $4h \cos^2 \alpha$ est son paramètre.

Pour appliquer ces formules à un exemple numérique, nous supposerons que l'angle de projection $\alpha = 60°$, et que le projectile est lancé avec une vitesse initiale $u = 500$ pieds, ou $162^m,42$ par seconde.

La hauteur due à cette vitesse

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{\overline{162,42}^2}{2 \times 9,8089};$$

en calculant par les Tables de logarithmes, nous aurons

2 log 162,42........	4.4212790	
c. log 2.............	9.6989700	
c. log 9,8089........	9.0083797	
log h..............	23.1286287	$h = 1344,71.$

Avec cette valeur de h, nous trouverons la hauteur du jet

$$y = h \sin^2 \alpha$$

log h..	3.1286287	
2 log sin 60°..........	19.8750612	
log y..............	23.0036899	$y = 1008,53.$

La valeur du paramètre se réduit à celle de h, ce qui

donne pour l'équation de la trajectoire rapportée à son sommet

$$y^2 = 1344,71\,x;$$

en faisant $x = 1008,53$, il viendra

$$y = \pm 1164^{m},552 = \pm \text{DA}:$$

chacune de ces valeurs de y est la moitié de l'amplitude.

258. Proposons-nous de chercher de quel angle un projectile doit être lancé, avec une vitesse initiale connue, pour atteindre uu but donné par ses coordonnées

La solution de ce problème consiste à dégager l'angle de projection α, ou l'une de ses lignes trigonométriques considérée comme l'inconnue de l'équation de la trajectoire; en mettant, dans cette équation, la valeur de $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tang}^2\alpha$, elle devient

$$\frac{x^2}{4h}(1 + \text{tang}^2\alpha) - x\,\text{tang}\,\alpha = -y;$$

en divisant par le facteur $\frac{x^2}{4h}$, et faisant passer le premier terme dans le second membre, on aura

$$\text{tang}^2\alpha - \frac{4h}{x}\text{tang}\,\alpha = -\frac{4hy}{x^2} - 1:$$

cette équation du second degré donne

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2h}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{4h^2 - 4hy - x^2},$$

ce qui fait voir que l'on peut pointer le canon suivant deux angles différents, de manière que le but qui doit être atteint

soit au point où se coupent les deux trajectoires que décrira le projectile.

Le but que l'on veut atteindre étant déterminé par ses coordonnées, en substituant leurs valeurs à la place de x et de y, l'équation précédente fera connaître les tangentes des deux angles de projection.

Supposons que le but soit au point B de l'axe horizontal AX, cette condition donne $y=0$, et l'équation devient

$$\tan g\alpha = \frac{2h}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{(2h+x)(2h-x)};$$

on a d'ailleurs, comme dans l'exemple précédent, la hauteur due à la vitesse initiale $h = 1344^{m},7$; l'amplitude, ou l'abscisse $x = 2329^{m},1$, et avec les Tables de logarithmes on trouvera

$\log 2h \ldots\ldots$ 3.4296554
$\log x \ldots\ldots$ 3.3671881

$\log \frac{2h}{x} \ldots\ldots$ 0.0624673 $\qquad \frac{2h}{x} = 1,154695;$

$\frac{1}{2}\log(2h+x) \ldots$ 1.8502869
$\frac{1}{2}\log(2h-x) \ldots$ 1.2783321
$c. \log x \ldots\ldots$ 6.6328119

$\log \frac{1}{x}\sqrt{(2h+x)(2h-x)} \ldots$ 9.7614309 $\qquad \frac{1}{x}\sqrt{(2h+x)(2h-x)} = 0,577339$

$$\tan g\alpha = 1,154695 \pm 0,577339.$$

La plus grande valeur de $\tan g\alpha$ correspond à l'angle $\alpha = 60^{\circ}$, et la plus petite à l'angle $\alpha = 30^{\circ}$; c'est donc en dirigeant l'axe du canon suivant la droite qui forme, avec l'axe horizontal, l'un ou l'autre de ces angles, qu'on obtient $2329^{m},1$ pour l'amplitude du jet.

Lorsque la quantité radicale est nulle, le problème n'a qu'une seule solution; on a $x = 2h$, $\tang \alpha = \frac{2h}{x} = 1$, l'angle $\alpha = 45°$, et $x = AB' = 2689^m,4$; cette amplitude du jet est la plus grande que l'on puisse obtenir, avec la vitesse initiale de $162^m,42$.

Si l'on a $4h^2 < 4hy + x^2$, le radical sera l'expression d'une quantité imaginaire, ce qui indique l'impossibilité d'atteindre le but, quel que soit l'angle de projection.

259. Le temps t que le projectile met à parcourir sa trajectoire est le même que celui que la composante $u\cos\alpha$, de la vitesse initiale u, mettrait à parcourir l'amplitude AB avec un mouvement uniforme. En effet, on a vu (**251**) que les règles de la composition et de la décomposition des forces sont applicables à la composition et à la décomposition des vitesses; ainsi l'on a

$$t = \frac{AB}{u\cos\alpha} = \frac{2329,1}{162,42\cos 60} = 28'',68.$$

En désignant par v la vitesse du projectile à un point quelconque M de sa trajectoire, on a

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2};$$

la décomposition de la vitesse initiale u, parallèlement aux axes, donne

$$\frac{dx}{dt} = u\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = u\sin\alpha - gt;$$

en substituant les valeurs des carrés de ces différentielles, et observant que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, la première équation devient

$$v^2 = u^2 - (2u\sin\alpha - gt)\,gt.$$

En intégrant la deuxième équation différentielle, on a

$$y = ut \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{u \sin \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gy}}{g};$$

cette valeur de t étant substituée dans celle de v^2, il viendra

$$v^2 = u^2 - 2gy.$$

Ce résultat fait voir que la loi de la pesanteur, sur un projectile qui décrit une trajectoire, est la même que si ce projectile était lancé verticalement de bas en haut.

260. La rapidité avec laquelle l'explosion de la poudre produit les phénomènes du mouvement des projectiles, et la grande étendue qu'ils embrassent, rendent difficiles tous les moyens dont il faudrait faire usage pour les observer directement.

Pour faciliter l'étude de ce mouvement, il faut chercher à produire un mouvement semblable, beaucoup moins rapide, ce qui est analogue à ce que l'on fait avec la machine d'Atwood, pour ralentir le mouvement produit par la pesanteur; mais le ralentissement n'est pas la seule condition à laquelle il faut satisfaire: on doit encore donner à ce mouvement une direction telle que la trajectoire décrite par le mobile passe par un point donné, qui est le but que l'on veut atteindre. Daniel Bernoulli a résolu ce problème, par le moyen d'une petite machine de son invention, qu'il a nommée *instrument balistique*.

Cet instrument, représenté en perspective (*fig.* 140), est composé de deux pièces de bois ABD, ABE, de 2 pouces de

large sur 1 pouce d'épaisseur, assemblées comme les branches d'un compas par une charnière AB; un quart de cercle, avec divisions, est fixé en F à la pièce ABE; il entre librement dans la gâche G ajustée sur la face latérale correspondante de la pièce ABD; cette gâche est percée d'un trou taraudé, pour recevoir une vis de pression.

La pièce ABE doit être solidement arrêtée dans la position verticale, avec des chevilles ou des vis l, m, n, contre un appui fixe.

La pièce ABD est mobile: on peut lui faire décrire un arc qui n'excède pas 90°; on arrête cette pièce avec la vis de pression de la gâche G contre le quart de cercle qui fait connaître la mesure de l'angle, ou l'inclinaison de cette pièce sur le plan horizontal.

Pour lancer les projectiles, Daniel Bernoulli se servait d'un tube de verre, dont le diamètre intérieur était d'environ 3 lignes; ce petit canon MN est fixé par deux liens I, K, dans une rainure creusée au milieu de la face extérieure de la pièce mobile ABD.

Le moteur est un ressort d'acier en hélice, ajusté dans l'intérieur du canon; un fil d'archal vissé au centre d'un disque, ou d'un tampon, sur lequel on pose la balle, traverse l'hélice suivant son axe; il sort librement par un petit trou percé dans le fond du canon: on lui attache un fil végétal que l'on fait passer dans la gorge d'une poulie fixe, et auquel on suspend un poids P qui tend le ressort; en coupant ce fil, l'élasticité du ressort fait partir la balle.

Une division de parties égales, placées au-dessous du point M, fait connaître le raccourcissement du ressort, lorsqu'on le charge successivement de divers poids.

Avec un poids d'une livre, et sous l'inclinaison de 45°,

l'instrument balistique de Bernoulli lançait une balle de plomb à 10 pieds de distance.

La *fig.* 140[a] représente une mire que l'on peut adapter à l'instrument balistique; il faut y joindre une visière que l'on ajuste près de la bouche du canon.

261. Pendant plus d'un siècle, la parabole a été regardée comme la trajectoire que les projectiles décrivent dans l'air, ainsi que dans le vide; on supposait la densité de l'air trop petite pour que les projectiles qui se meuvent dans ce fluide pussent en éprouver une résistance capable de modifier sensiblement la courbe qu'ils décrivent; cette opinion a été soutenue dans les ouvrages publiés sur ce sujet par Bélidor, Blondel, Halley et plusieurs autres auteurs.

Cependant Newton, dans le second livre de ses *Principes mathématiques de Philosophie naturelle,* avait rapporté des expériences d'après lesquelles il a établi ce principe : que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse des corps qui se meuvent dans ce fluide; et quoiqu'il ne soit pas parvenu à déterminer la courbe que les projectiles décrivent dans l'air, il a fait voir que cette courbe n'est pas une parabole.

La solution analytique de ce problème a été trouvée en 1718 par Jean Bernoulli, et ensuite par quelques autres géomètres; mais leurs formules ne répondaient pas aux besoins de la pratique.

Des expériences étaient nécessaires : celles de Robins, publiées en 1742, dans ses *Principles of Gunnery,* ont fait connaître les erreurs de l'ancienne théorie; le célèbre Euler a traduit en allemand l'ouvrage de Robins, il y a joint un commentaire très étendu, et Lombard en a publié une traduction française, avec des notes, en 1783. On voit par ces

dates, que la vraie théorie, appuyée sur des faits bien constatés, n'est parvenue que lentement à remplacer celle qui avait été adoptée comme vraie et qui ne pouvait produire que des résultats erronés.

Plusieurs autres géomètres ont publié de savants mémoires sur le mouvement des projectiles dans l'air; on trouve la solution générale de ce problème dans tous les traités de Mécanique analytique, mais cette solution se réduit à des équations différentielles qui ne sont pas intégrables, et l'on ne peut en tirer les valeurs des coordonnées de la trajectoire que par des méthodes d'approximation.

Proposons-nous de trouver une équation au moyen de laquelle nous puissions tracer, avec une approximation à peu près exacte, la courbe, ou la trajectoire, que décrit un projectile dans l'air.

Nous reprendrons les notations précédentes, et nous nous servirons de la *fig.* 139 pour les compléter, quoique la trajectoire que nous cherchons ne soit pas une parabole.

Appelons s l'arc AM, décrit au bout du temps t par le projectile; menons l'ordonnée mp, infiniment proche de MP, la droite Md parallèle à l'axe AX, et la tangente MT au point M de la courbe; cette tangente se confond avec l'arc infiniment petit $Mm = ds$, et $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sont les cosinus des angles qu'elle forme avec les axes des x et des y, ou avec des parallèles à ces axes.

Désignons par R l'intensité de la résistance de l'air : cette résistance est une force motrice, dont l'action est toujours directement opposée au mouvement du projectile; elle agit donc dans le direction de la tangente MT au point M, et en la décomposant suivant les axes, on a $-R\frac{dx}{ds}$, $-R\frac{dy}{ds}$, pour

64..

les composantes; nous les affectons du signe négatif, parce qu'elles tendent à diminuer les axes.

Il est facile, maintenant, de former les équations différentielles du problème : si l'on divise les composantes de la force motrice par la masse du projectile, que nous représenterons par m, les quotients $-\frac{R}{m}\frac{dx}{ds}$, $-\frac{R}{m}\frac{dy}{ds}$, seront des forces accélératrices; en les substituant à la place de X et de Y, dans les équations de l'art. 253, et ajoutant la pesanteur $-g$ à la deuxième, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{R}{m}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g-\frac{R}{m}\frac{dy}{ds}.$$

Nous avons trouvé (249), d'après la théorie de Newton, que lorsqu'une sphère se meut dans l'air, elle éprouve une résistance égale au poids d'un cylindre d'air qui a pour base l'aire d'un grand cercle de cette sphère, et dont la hauteur est la moitié de la hauteur due à sa vitesse.

Soient r le rayon du projectile, π le rapport de la demi-circonférence au rayon; πr^2 sera la mesure du grand cercle.

En désignant par h la hauteur due à la vitesse v du projectile, on a $h=\frac{v^2}{2g}$; donc $\pi r^2 \times \frac{v^2}{2g}$ est le volume du cylindre, et si l'on nomme δ la densité de l'air, en multipliant le volume par δg, on aura $R=\frac{1}{2}\pi r^2\delta v^2$ pour l'intensité de la force motrice.

Cette force théorique doit être diminuée, pour la mettre d'accord avec l'expérience; nous avons vu (249) que Newton la réduit à moitié. Borda a trouvé, par les expériences qu'il a publiées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1763, qu'elle doit être réduite à $\frac{3}{5}$; nous la réduirons

à $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire que nous prendrons pour sa valeur

$$R = \frac{1}{3}\pi r^2 \delta v^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \delta \frac{ds^2}{dt^2}.$$

La densité du projectile étant représentée par D, sa masse $m = \frac{4}{3}\pi r^3 D$, et la force accélératrice $\frac{R}{m} = \frac{0,25\delta}{Dr}\cdot\frac{ds^2}{dt^2}$; en substituant cette valeur de $\frac{R}{m}$ dans les équations du problème, et faisant, pour abréger, $k = \frac{0,25\delta}{Dr}$, ces équations deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dy}{ds}.$$

Multipliant ces équations par dt^2 et réduisant, on aura

$$d^2x = -kdsdx, \quad d^2y = -gdt^2 - kdsdy;$$

prenant la valeur de kds dans la première et la substituant dans la seconde, il vient

$$d^2y = -gdt^2 + \frac{dyd^2x}{dx},$$

d'où l'on tire

$$gdt^2 = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dx}.$$

En multipliant le second membre par $\frac{dx}{dx}$, et observant que $\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dx^2}$ est la différentielle de $-\frac{dy}{dx}$, cette équation devient

$$gdt^2 = -dxd\frac{dy}{dx} = -dxdp;$$

nous faisons, pour simplifier, $\frac{dy}{dx} = p$.

En supposant dt constant dans la première équation

$$\frac{d^2x}{dt} = -kds\frac{dx}{dt},$$

et transposant $\frac{dx}{dt}$, on voit que son premier membre $\frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ est une différentielle logarithmique, et que cette équation a pour intégrale

$$\log\frac{dx}{dt} = -ks + C;$$

la constante C est le logarithme népérien d'un nombre que nous désignerons par B, et en observant que, e étant la base de ces logarithmes, $\log e = 1$, nous aurons

$$\log\frac{dx}{dt} = -ks\log e + \log B = \log Be^{-ks};$$

en passant des logarithmes aux nombres, on a

$$\frac{dx}{dt} = Be^{-ks}.$$

A l'origine A, l'arc $s = 0$, et $\frac{dx}{dt} = Be^0 = B$; d'ailleurs la vitesse initiale estimée suivant l'axe AX, ou $\frac{dx}{dt} = u\cos\alpha$: c'est la valeur de la constante B, et l'on a pour celle de l'intégrale

$$\frac{dx}{dt} = u\cos\alpha e^{-ks}, \quad dt = \frac{e^{ks}dx}{u\cos\alpha};$$

cette valeur de dt étant substituée dans la deuxième équation, on aura

$$-e^{2ks} = \frac{u^2}{g}\cos^2\alpha\frac{dp}{dx} = 2h\cos^2\alpha\frac{dp}{dx}.$$

Le triangle rectangle élémentaire M*dm* donne

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2 p^2,$$
$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}};$$

en substituant cette valeur à la place de dx, l'équation précédente devient

$$-e^{2ks} ds = 2h \cos^2 \alpha \, dp \sqrt{1+p^2},$$

et son intégrale

$$-\frac{1}{2k} e^{2ks} = 2h \cos^2 \alpha \int dp \sqrt{1+p^2};$$

en développant le radical, et prenant l'intégrale de chaque terme, on aura

$$-e^{2ks} = 4kh \cos^2 \alpha \left(p + \tfrac{1}{6} p^3 - \tfrac{1}{40} p^5 + \text{etc.}\right) + \text{C}.$$

On détermine la constante C, en observant qu'on a en même temps $s = 0$ et $p = \text{tang}\,\alpha$, ce qui donne

$$-1 = 4kh \cos^2 \alpha \left(\text{tang}\,\alpha + \tfrac{1}{6} \text{tang}^3 \alpha - \tfrac{1}{40} \text{tang}^5 \alpha + \text{etc.}\right) + \text{C},$$
$$\text{C} = -1 - 4kh \cos^2 \alpha \left(\text{tang}\,\alpha + \tfrac{1}{6} \text{tang}^3 \alpha - \tfrac{1}{40} \text{tang}^5 \alpha + \text{etc.}\right);$$

substituant cette valeur à la place de C, et changeant les signes, l'équation devient

$$e^{2ks} = 1 + 4kh \cos^2 \alpha \left[\text{tang}\,\alpha - p + \tfrac{1}{6}(\text{tang}^3 \alpha - p^3) - \tfrac{1}{40}(\text{tang}^5 \alpha - p^5) + \text{etc.}\right].$$

Lorsque l'angle de projection α n'excède pas 45°, $\text{tang}\,\alpha - p$ est une fraction; les termes de la série d'un ordre supérieur à la première puissance peuvent être négligés, et l'on a seulement

$$e^{2ks} = 1 + 4kh \cos^2 \alpha \, (\text{tang}\,\alpha - p);$$

cette valeur de l'exponentielle étant égalée à celle que nous avons déjà trouvée, on aura

$$-2h\cos^2\alpha\frac{dp}{dx}=1+4kh\cos^2\alpha(\tang\alpha-p);$$

en multipliant par dx et transposant, pour dégager cette différentielle, il viendra

$$dx=\frac{-2h\cos^2\alpha\,dp}{1+4kh\cos^2\alpha(\tang\alpha-p)};$$

multipliant cette équation par $2k$ et intégrant, on aura

$$2kx=\log[1+4kh\cos^2\alpha(\tang\alpha-p)]:$$

la constante est nulle, parce qu'on a en même temps $x=0$ et $\tang\alpha=p$.

Pour passer des logarithmes aux nombres, nous observerons qu'on a $2kx=\log e^{2kx}$; au moyen de cette substitution l'équation devient

$$e^{2kx}=1+4kh\cos^2\alpha(\tang\alpha-p),$$

ou

$$4kh\cos^2\alpha p=1+4kh\cos^2\alpha\tang\alpha-e^{2kx};$$

en substituant la valeur de $p=\frac{dy}{dx}$, et intégrant, on aura

$$4kh\cos^2\alpha y=(1+4kh\cos^2\alpha\tang\alpha)x-\frac{e^{2kx}}{2k}+C.$$

A l'origine A, on a $x=0$ et $y=0$; ainsi la constante $C=\frac{1}{2k}$, d'où il résulte

$$8k^2h\cos^2\alpha y=(2k+8k^2h\cos^2\alpha\tang\alpha)x-e^{2kx}+1:$$

c'est l'équation de la trajectoire, que l'on peut mettre sous la forme suivante

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{e^{2kx} - (2kx + 1)}{8k^2 h \cos^2 \alpha}.$$

L'expression du temps t se déduira facilement des deux équations

$$gdt^2 = - dxdp, \quad e^{2ks} = - 2h \cos^2 \alpha \frac{dp}{dx};$$

en faisant $s = x$, éliminant dp, et prenant ensuite la racine carrée de chaque membre, on trouve

$$dt = \frac{e^{kx} dx}{\sqrt{2gh} . \cos \alpha},$$

et en intégrant, on aura

$$t = \frac{\frac{1}{k} e^{kx}}{\sqrt{2gh} . \cos \alpha} + \text{C}.$$

Pour déterminer la constante, on observera qu'à l'origine on a $t = 0$, et $x = 0$; d'où il résulte que $\text{C} = - \frac{1}{k \sqrt{2gh} . \cos \alpha}$; en mettant cette valeur de C, on a

$$t = \frac{e^{kx} - 1}{k \sqrt{2gh} . \cos \alpha}.$$

262. Appliquons maintenant ces formules générales à quelques exemples numériques.

Premier exemple. Quelle sera la trajectoire et l'amplitude, ou la portée horizontale, d'un boulet lancé par un canon de 24, pointé à 30 degrés d'élévation, avec une charge de poudre dont l'explosion imprime au boulet une vitesse initiale de 500 pieds, ou 162^{m},42 par seconde?

65

Il faut d'abord déterminer les valeurs des constantes: nous avons trouvé (257), la hauteur due à la vitesse initiale $h = 1344^{m},7$; pour la quantité $k = \frac{0,25\delta}{Dr}$, on fait la densité de l'air $\delta = 1$, et l'on a la densité du fer fondu $D = 6047$; le rayon r du boulet de 24 est de $5^{po},444$, ou $0^{m},07369$; en substituant ces nombres, la formule devient $k = \frac{0,25}{6047 \times 0,07369}$, et en effectuant les calculs indiqués, on trouvera $k = 0,00056$, à moins d'un cent-millième près.

Puisque l'angle $\alpha = 30^{\circ}$, on a $\tan g\alpha = 0,57735$; ces valeurs des lettres étant substituées dans la formule de la trajectoire, on aura

$$y = 0,57735\,x - \frac{e^{0,00112x} - (0,00112x + 1)}{8 \times \overline{0,00056}^{2} \times 1344,7 \cos^2 30^{\circ}}.$$

On sait d'ailleurs que la lettre e représente la base des logarithmes népériens, ou le nombre 2,7182818...; ainsi, en prenant sur l'axe AX des abscisses x à volonté, on pourra calculer les valeurs de y, ou les ordonnées correspondantes à ces abscisses.

Prenons l'abscisse $x = Aq = 400$ mètres, et conservons la lettre e, pour simplifier, nous aurons

$$y = 230,94 - \frac{e^{0,448} - 1,448}{8 \times \overline{0,00056}^{2} \times 1344,7 \cos^2 30^{\circ}};$$

en calculant le terme fractionnaire par les Tables de logarithmes, il viendra

$$\log e^{0,448} = 0,448 \log 2,7182818 = 0,448 \times 0,4342945$$
$$= 0,1945639;$$

$$e^{0,448} = 1,565178$$
$$\begin{array}{r} 1,448 \\ \hline 0,117178: \end{array}$$

c'est le numérateur; en prenant son logarithme, et lui ajoutant les compléments de ceux des facteurs du dénominateur, on aura

log 0,117178		$\bar{1}.0688460$
c. log 8	9.0969100	
c. 2 log 0,00056	16.5036240	
c. log 1344,7	6.8713746	
c. 2 log cos 30°	10.1249388	42.5968474
log 46,31		41.6656934

$$y \quad qn = 230,94 - 46,31 = 184,63.$$

En prenant sur l'axe AX des abscisses en progression arithmétique (celles de la *fig.* 139 ont été prises de 200 en 200 mètres), et calculant, par des opérations semblables à celles que nous venons de faire, les ordonnées correspondantes, la courbe $AncE$, qui passera par les extrémités de ces ordonnées, sera la trajectoire décrite par le projectile. On trouvera, par quelques essais, que l'amplitude du jet est de 1332 mètres: c'est l'abscisse $x = AE$, à laquelle correspond l'ordonnée $y = 0$. Cette amplitude est à peu près la moitié de celle qui aurait lieu dans le vide; mais, pour les grandes vitesses, la différence devient beaucoup plus considérable, comme on le verra dans l'exemple suivant.

Deuxième exemple. Tracer la trajectoire que décrit un projectile, ou un boulet, lancé par un canon de 24, pointé à 45 degrés, avec une charge de 9 livres, ou $4^{\text{kilog}},405$ de poudre, qui imprime au boulet une vitesse initiale de 1500 pieds, ou $487^{\text{m}},26$ par seconde.

Soit A (*fig.* 141) le centre de la bouche du canon, dont l'axe est dirigé suivant la droite AL, qui forme, avec l'axe horizontal AX, l'angle LAX, ou $\alpha = 45$ degrés; on a

$\operatorname{tang} \alpha = 1$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$, et l'équation de la trajectoire devient

$$y = x - \frac{e^{2kx} - (2kx + 1)}{4k^2 h}.$$

La valeur de la constante $k = 0{,}00056$, comme dans l'exemple précédent; on trouve celle de h, ou la hauteur due à la vitesse initiale u, par la formule

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{\overline{487{,}26}^2}{2 \times 9{,}8089},$$

ce qui donnera, par les logarithmes,

2 log u	5.3755216	
c. log 2	9.6989700	
c. log g	9.0083797	
log h	24.0828713	$h = 12102{,}39$

Si l'on prend une abscisse $x = 500$ mètres, on aura l'ordonnée correspondante

$$y = 500 - \frac{e^{0{,}56} - 1{,}56}{4k^2 h};$$

en calculant le terme fractionnaire d'aprés la méthode que nous avons suivie dans le premier exemple, on trouvera

$$\log e^{0{,}56} = 0{,}56 \times 0.4342945 = 0.2432049,$$

$$e^{0{,}56} = 1{,}750672$$

$$1{,}56$$

log	0,190672		$\bar{1}.2802869$
c. log 4		9,3979400	
c. 2 log k		16,5036240	
c. log h		5,9171287	31.8186927
log		12,5597 ...	31.0989796

$$y = 500 - 12{,}56 = 487{,}44.$$

Il sera facile maintenant de calculer toutes les ordonnées dont on a besoin pour tracer la trajectoire AEHB que décrit le projectile. On trouvera, en faisant quelques essais, que l'abscisse $x = \mathrm{AB}$, à laquelle correspond l'ordonnée $y = 0$, et qui forme l'amplitude du jet, ou la portée, est de 3671 mètres, ou 1883 toises.

Cet exemple a été calculé par Borda, avec les formules qu'il a publiées dans son Mémoire inséré dans le volume des *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1769, imprimé en 1772; il a trouvé 1899 toises pour la portée. Il n'y a que 16 toises de différence entre ce résultat et celui que nous avons obtenu.

Dans le vide, la portée serait de 24204 mètres, ou 12418 toises; on voit que la portée, dans l'air, n'est pas la sixième partie de celle qui aurait lieu dans le vide.

La parabole, qui est la trajectoire dans le vide, n'a aucune analogie avec celle qu'un projectile décrit dans l'air; la branche ascendante de cette dernière courbe est beaucoup plus longue que la branche descendante; chaque branche a une asymptote, que l'on détermine par l'analyse, et celle de la branche descendante est verticale.

263. Nous avons pris, comme une quantité donnée, la vitesse du boulet à la sortie du canon, ou sa vitesse initiale : cette quantité ne peut pas être obtenue par des observations directes; le moyen le plus généralement employé pour la déterminer consiste dans le *pendule balistique*, inventé par Robins.

Le châssis de ce pendule est une chèvre à trois branches, dont le faîte conique M (*fig.* 142) est consolidé par un cercle de fer; le pendule est aussi en fer : son essieu, ou son arbre, est ajusté dans les supports S, T, solidement fixés aux

branches antérieures de la chèvre, de manière que l'axe de cet arbre soit horizontal et qu'il puisse tourner presque aussi librement que par une suspension à couteaux. A l'extrémité inférieure de la verge AB du pendule, on a fixé un parallélipipède de bois CDEF, dont la face antérieure est plaquée en plomb pour éviter le rejaillissement; c'est le but contre lequel on tire. Le pendule est mis en mouvement par le choc du boulet, et la corde de l'arc qu'il décrit est mesurée par un ruban dont l'un des bouts est attaché au bas du pendule, et qui passe dans une garniture N, fixée au milieu de la traverse IK parallèle à l'arbre du pendule.

En appliquant au pendule balistique les règles qui se déduisent de la théorie du pendule, que nous ferons connaître plus loin, on en déduit la vitesse initiale des projectiles.

CHAPITRE IX.

DES FORCES CENTRALES DANS LE CERCLE, ET DANS LES COURBES DIFFÉRENTES DU CERCLE.

264. Si un corps, que nous considérerons d'abord comme un simple point matériel, décrit la circonférence d'un cercle, ce corps tendra continuellement à s'éloigner du centre suivant la direction de la tangente, ce qui aurait lieu s'il était abandonné à lui-même; l'effort qu'il fait pour suivre cette direction se nomme *force centrifuge,* et l'on appelle *force centripète* ou *centrale,* celle qui agit sans interruption sur le corps mobile pour le retenir et lui faire décrire la circonférence du cercle: la force centrale et la force centrifuge sont égales et directement opposées.

Soit A (*fig.* 143) le point matériel retenu par le fil inextensible CA, fixé au centre C; supposons que ce point A reçoive, perpendiculairement à CA, une impulsion capable de lui faire parcourir la distance AT pendant l'instant t, s'il était libre; pendant le même instant la force centrale lui fait parcourir la distance TB, parce que le rayon CA étant dans la position CB, le point matériel est toujours à l'extrémité B de ce rayon.

La force centrale fait parcourir au mobile la distance TB, pendant l'instant t; si l'on prolonge TC jusqu'à la rencontre de la circonférence en E, on aura, par la propriété de la sécante et de la tangente menées par un point extérieur au

cercle :

$$TB = \frac{\overline{AT}^2}{TE}.$$

L'arc AB étant très petit, on peut, au lieu de TB, prendre le sinus verse AP; on peut aussi mettre l'arc AB à la place de la tangente AT et le diamètre BE au lieu de la sécante TE; par ces substitutions, la formule précédente deviendra

$$\text{AP ou sin verse AB} = \frac{\text{arc }\overline{AB}^2}{BE} = \frac{\text{arc }\overline{AB}^2}{2R}.$$

La force centrifuge est une force accélératrice constante de même nature que la pesanteur; en désignant cette force par F, elle sera exprimée par la formule

$$F = \frac{2e}{t^2}.$$

La quantité e représente l'espace que la force centrale fait parcourir au mobile pendant l'instant t: cet aspace est égal au sinus verse du petit arc parcouru par le mobile; ainsi l'on a

$$e = \frac{\text{arc }\overline{AB}^2}{2R},$$

et la formule devient $F = \frac{2 \times \frac{\text{arc }\overline{AB}^2}{2R}}{t^2} = \frac{\text{arc }\overline{AB}^2}{Rt^2}$.

Si l'on désigne la vitesse par v, on aura

$$v = \frac{\text{arc AB}}{t}, \quad v^2 = \frac{\text{arc }\overline{AB}^2}{t^2};$$

cette valeur étant substituée à la place de $\frac{\text{arc }\overline{AB}^2}{t^2}$, dans l'ex-

pression de la force centrifuge, cette force sera exprimée par la formule

$$F = \frac{v^2}{R}.$$

Ce qui fait voir que la force centrale et la force centrifuge sont égales au carré de la vitesse divisé par le rayon.

La force centrale agit toujours suivant la direction du rayon, ou perpendiculairement à la circonférence du cercle; ainsi elle ne produit aucun changement dans la vitesse du mobile, qui est uniforme pendant tout le temps du mouvement circulaire.

265. Soit T le temps employé par le mobile à décrire la circonférence entière dont le rayon est $AC = R$, et π la circonférence dont le diamètre est l'unité; on aura

$$v = \frac{\text{circ}.R}{T} = \frac{2\pi R}{T};$$

le carré de cette valeur de v étant substitué dans la formule de la force centrifuge, il viendra

$$F = \frac{4\pi^2}{T^2}.R.$$

Si une autre force F′ fait décrire au mobile une circonférence dont le rayon est R′, pendant le temps T′, on aura pareillement

$$F' = \frac{4\pi^2}{T'^2}.R';$$

de ces deux formules on tire la proportion suivante :

$$F : F' :: \frac{1}{T^2}.R : \frac{1}{T'^2}.R';$$

ce qui fait voir que les forces centrifuges sont en raison directe des rayons, ou des circonférences décrites par le mobile, et en raison inverse des carrés des temps.

Lorsque les temps sont égaux, les forces centrifuges sont proportionnelles aux rayons; par conséquent les parties égales d'un mobile qui se meut circulairement font un effort d'autant plus grand pour se détacher, qu'elles sont plus éloignées de l'axe de rotation.

Chaque mobile, dans les formules précédentes, est supposé réduit à un simple point matériel, que l'on peut considérer comme l'unité de masse; pour avoir égard aux masses, il suffit de multiplier les valeurs des forces centrifuges F, F', par les masses M, M' auxquelles ces forces sont appliquées.

Soient H la hauteur due à la vitesse v, et g la force accélératrice de la pesanteur, on aura $v^2 = 2g\text{H}$; substituant cette valeur de v^2 dans l'équation $\text{F} = \frac{\text{M}v^2}{\text{R}}$, il viendra

$$\text{F} = \frac{2\text{M}g\text{H}}{\text{R}} = \frac{\text{M}g\text{H}}{\frac{1}{2}\text{R}}.$$

Cette formule renferme la proportion suivante :

$$\text{F} : \text{M}g :: \text{H} : \tfrac{1}{2}\text{R};$$

c'est-à-dire que la force centrifuge est au poids du mobile comme la hauteur due à sa vitesse est à la moitié du rayon de la circonférence qu'il décrit. Appliquons ces règles générales à quelques cas particuliers.

Premier exemple. Un corps du poids de 125 grammes décrit la circonférence d'un cercle dont le rayon est de 1 mètre, avec une vitesse de 10 mètres par seconde; quelle est la force centrifuge qui retient ce mobile?

La hauteur H, dont le mobile devrait tomber pour acquérir la vitesse de 10 mètres, est de $5^m,097$; cette valeur de H et celles des autres lettres étant substituées dans la proportion précédente, on aura

$$F : 125 :: 5,097 : \frac{1}{2} :: 10,194 : 1.$$

La force centrifuge, ou la tension de la corde, est de 10,194 fois le poids du mobile.

Si la valeur de H, ou la hauteur due à la vitesse du mobile, était égale à la moitié du rayon, la force centrifuge de ce mobile serait égale à son poids.

Deuxième exemple. Quelle est la force centrifuge d'un point matériel placé sur la circonférence de l'équateur, et qui parcourt cette circonférence pendant la rotation de la Terre autour de son axe.

Le rayon de l'équateur est de 6 376 606 mètres, et sa circonférence $2\pi r = 2 \times 3,14159 \times 6376606$. Le temps de la révolution de la Terre est à peu près l'intervalle entre deux passages consécutifs d'un point de l'équateur au méridien, ou 24 heures sidérales, qui font $23^h56'4''$ de temps moyen; en divisant la circonférence de l'équateur par ce dernier nombre réduit en secondes, on trouve 465 mètres pour la vitesse du mobile.

On calculera la hauteur due à cette vitesse par la formule $H = \frac{v^2}{2g}$, mais il faut prendre, pour la valeur de g, la vitesse acquise par un corps qui tombe pendant une seconde sous l'équateur; suivant les expériences de Bouguer, cette vitesse est de 30,1 pieds, ou $9^m,78$, ce qui donne

$$H = \frac{\overline{465}^2}{19,56} = 11054 \text{ mètres.}$$

66..

Les nombres que nous venons de trouver étant substitués dans la proportion générale, on aura

$$F : 9{,}78 :: 11{,}054 : 3188303 :: 1 : 288{,}4.$$

La force centrifuge est donc $\frac{1}{288{,}4}$ de la pesanteur, et ces deux forces sont directement opposées; par conséquent l'intensité de la pesanteur qui agit sur les corps, à l'équateur, est à peu près $\frac{1}{289}$ fois moindre que si elle n'éprouvait pas l'effet de la force centrifuge produite par la rotation de la Terre.

Si cette rotation était 17 fois plus grande, on aurait

$$H = \frac{\overline{17}^2 \times \overline{465}^2}{19{,}56};$$

en calculant cette quantité par le moyen des Tables de logarithmes, on trouve

2 log 17..........	2.4608978
2 log 465.........	5.3349060
c. log 19,56.........	8.7086311
log H..........	16.5044349

$$H = 3194735.$$

Cette valeur de H fait voir qu'avec une pareille vitesse de rotation, l'action de la pesanteur serait détruite par celle de la force centrifuge.

L'intensité de la force centrifuge est proportionnelle au rayon du cercle que décrit le mobile; en allant de l'équateur au pôle, cette force est d'autant moindre que le rayon du parallèle est plus petit, et sous le pôle la force centrifuge est nulle. Ce décroissement produit un effet contraire sur l'ac-

tion de la pesanteur, qui augmente en allant de l'équateur au pôle; elle aurait donc un accroissement de $\frac{1}{289}$, si la figure de la Terre était exactement sphérique; mais, à cause de l'aplatissement de la Terre, la pesanteur augmente, en allant vers les pôles, suivant un rapport plus grand que celui qui est exprimé par cette dernière fraction. La loi de cet accroissement a été constatée par les expériences sur le pendule, comme nous le verrons dans l'un des chapitres suivants.

266. La pesanteur, ou la force qui attire les corps vers le centre de la Terre, agit sur tous les corps, en raison directe de leurs masses et suivant la raison inverse du carré de leurs distances au centre de la Terre; il est difficile d'apprécier cette loi dans les petites distances auxquelles nous pouvons nous élever au-dessus de la surface de la Terre. Aussi Newton, à qui nous devons cette grande découverte, ne trouvant pas de moyens suffisants pour la vérifier par des expériences directes, en chercha la preuve dans la conformité entre cette loi avec celle des forces centrales appliquées au mouvement de la Lune autour de la Terre; cette idée hardie ne fut pas confirmée par ses premiers calculs, parce que les sciences astronomiques n'étaient pas encore assez avancées pour lui fournir les données dont il avait besoin avec une exactitude suffisante; il reprit ses calculs quelques années plus tard, lorsqu'il eut connaissance de la mesure de la Terre exécutée en France par Picard, et ses conjectures furent entièrement confirmées. Nous allons donner succinctement la solution du problème que Newton s'était proposé.

Considérons la courbe que décrit la Lune autour de la Terre comme un cercle; par cette supposition les calculs deviennent très simples, et le résultat que l'on obtient est très

approché de la vérité, parce que l'orbite que décrit la Lune est presque circulaire.

La force centrale, dans le cercle, est exprimée par la formule

$$F = \frac{V^2}{R}.$$

Du point C (*fig.* 144), centre commun du globe terrestre et de l'orbite de la Lune, et avec les rayons CM = R, CT = r, Cm = 1, décrivons trois circonférences, dont la première représentera l'orbite de la Lune, et la seconde l'équateur terrestre.

Soit MN = V l'arc décrit par la Lune, pendant une seconde; sa vitesse angulaire sera l'arc semblable $mn = u$, dont le rayon est l'unité.

Les arcs semblables V, u, donnent la proportion

$$1 : R :: u : V = Ru;$$

en substituant cette valeur de V, la force centrifuge devient

$$F = Ru^2.$$

Le rayon R de l'orbite de la Lune est de 384 544 605 mètres; connaissant le rayon, il est facile de trouver la circonférence, et de calculer ensuite les valeurs de V et u; les calculs étant effectués, on aura la vitesse angulaire $u = 0{,}0000026617$, ce qui donne

$$F = 384544605 \times (0{,}0000026617)^2.$$

Si le rapport de cette force à la pesanteur terrestre est égal

au rapport inverse des carrés des distances, on aura $\frac{F}{g}=\frac{r^2}{R^2}$; en substituant les valeurs des lettres et effectuant les calculs, on trouve

$$\frac{F}{g}=\frac{F}{9,809}=0,00028;\quad \frac{r^2}{R^2}=\frac{(6376606)^2}{(384544605)^2}=0,00034.$$

Ces deux rapports, évalués seulement avec les données principales, sont exprimés par des nombres dont la différence est moindre qu'un dix-millième d'unité; c'est une approximation suffisante pour ne laisser aucun doute sur la vérité de la proposition qu'il s'agissait de prouver, c'est-à-dire que le mouvement de la Lune autour de la Terre est produit par l'effet de la pesanteur, dont l'intensité est inverse du carré des distances.

267. Si un mobile sollicité par une force centrifuge appliquée à un point fixe, décrit le périmètre d'un polygone, ou la courbe inscrite qui ne soit pas une circonférence de cercle, la force centrifuge ne sera pas constante comme dans le cercle, mais les triangles, ou les secteurs décrits par le rayon vecteur mené du point fixe au mobile, seront proportionnels aux temps.

Cette application des forces centrales aux courbes différentes du cercle a déjà été déduite de l'analyse (254); la démonstration suivante éclaircira ce qui pourrait ne pas avoir été bien compris dans la première.

Soit C (*fig.* 145) le point fixe auquel est appliquée la force centrifuge qui agit sur le mobile A; supposons que ce mobile reçoit une impulsion capable de lui faire parcourir la distance AB dans le premier instant, le rayon vecteur CA décrira le triangle CAB; pendant le deuxième instant le mo-

bile décrirait, suivant la même direction, la distance BE = AB, s'il n'était pas soumis à l'action de la force centrifuge. Soit BF l'espace que cette force lui ferait parcourir dans un instant, si elle agissait seule; alors le mobile étant soumis à l'action simultanée de deux forces représentées par les droites BE, BF, prises sur leurs directions, la diagonale BD du parallélogramme BEDF construit sur ces droites représentera la résultante des forces, et le triangle CBD sera l'espace décrit par le rayon vecteur pendant le deuxième instant.

Les deux triangles CAB, CBE, qui ont leurs sommets au point C, et des bases égales AB, BE, situées sur la même droite, sont égaux entre eux; le triangle CBE est égal au triangle CBD, car ils ont la base commune CB, et leurs sommets E, D, sont situés sur une droite parallèle à cette base. Donc chacun des triangles CAB, CBD est égal au même triangle CBE, et par conséquent ces deux triangles sont égaux entre eux.

On prouverait de la même manière que le triangle CDG, décrit pendant le troisième instant, est égal au triangle CBD, et qu'il en serait de même pour tous les autres triangles décrits par le rayon vecteur, pendant des instants égaux; par conséquent l'aire décrite par le rayon vecteur, pendant un temps quelconque, est proportionnelle à ce temps.

Réciproquement, si les aires décrites par le rayon vecteur autour du centre C, croissent comme les temps, la force qui agit sur le mobile est dirigée vers ce centre.

Les deux triangles CAB, CBD sont égaux entre eux, puisqu'ils sont décrits dans deux instants consécutifs et égaux; les deux triangles CAB, CBE ayant des bases égales et leur sommet au point C, sont aussi égaux; donc les triangles CBD, CBE sont égaux, et puisqu'ils ont une base commune CB,

la droite ED qui joint leurs sommets est parallèle à leur base, d'où il résulte que la force accélératrice, ou la force centrifuge qui détourne le mobile de la direction rectiligne, agit suivant le rayon vecteur CB.

268. La théorie des forces centrales a servi de base à Newton pour la plus belle découverte que l'on ait faite dans les sciences, celle de la force par laquelle les corps du système solaire exécutent leurs mouvements; nous avons vu que le mouvement de la Lune autour de la Terre est produit par la pesanteur: cette même force que l'on nomme attraction, ou pesanteur universelle, agit sur chaque planète, et leur fait décrire des courbes elliptiques; ces orbites, ou trajectoires, ont un foyer commun placé au centre du Soleil; chaque planète est retenue dans son orbite par la force d'attraction dirigée suivant le rayon vecteur mené du centre du Soleil au centre de cette planète.

Ce système, admirable par sa simplicité et par la régularité avec laquelle les astres qui le composent exécutent leurs mouvements, a été, depuis la plus haute antiquité, l'un des principaux objets que les hommes de génie ont cherché à pénétrer; leurs tentatives consistaient à imaginer des hypothèses pour expliquer les phénomènes que présentaient les observations, mais il a fallu attendre les progrès des sciences mathématiques et le perfectionnement des arts mécaniques, dont le concours était nécessaire pour la démonstration des lois du mouvement que suivent les corps célestes, et l'exactitude des observations qui devaient servir à confirmer ces lois.

L'Astronomie a été cultivée avec beaucoup de zèle par les anciens philosophes: Hipparque s'est illustré par ses découvertes et ses observations, vers la fin du deuxième siècle avant notre ère. Ptolémée, en réunissant toutes les découvertes

de ses prédécesseurs, dans son Almageste, en a formé un corps de doctrine qui a été longtemps le guide des astronomes.

Copernic, après avoir employé plus de trente ans à examiner tous les systèmes qui avaient été proposés avant lui, publia en 1543, peu de temps avant sa mort, celui qui a conservé son nom, et d'après lequel la Terre, au lieu de rester immobile, décrit une orbite circulaire autour du Soleil, en faisant chaque jour une révolution autour de son axe; l'annonce de ce nouveau système fut le signal de disputes qui durèrent plus d'un siècle.

L'un des plus célèbres défenseurs du système de Copernic fut Galilée; convaincu de la vérité de ce système, qui avait été condamné à Rome en 1615, par un décret de la Congrégation de l'Index, Galilée composa des Dialogues sur les systèmes du monde, dans lesquels il soutenait celui de Copernic, comme étant le seul admissible. En 1630 il parvint à faire imprimer cet ouvrage; une commission de théologiens fut chargée de l'examiner, et l'auteur fut condamné à une prison perpétuelle, que l'on parvint à faire commuer en une prison dans sa retraite près de Florence.

Vers la même époque, le véritable système du monde, dont Copernic avait établi les premiers fondements, fut considérablement simplifié par Képler; cet homme extraordinaire possédait au plus haut degré l'esprit investigateur pour toutes les recherches qui pouvaient le conduire à des découvertes, la persévérance pour suivre le même objet aussi loin qu'il lui était possible de l'apercevoir, et un esprit de détail qui n'était jamais rebuté par la longueur des calculs qu'il fallait effectuer et recommencer un grand nombre de fois; c'est avec cette application infatigable, qui doit être imitée

par tous ceux qui veulent se distinguer, qu'il parvint à faire les découvertes qui ont illustré son nom.

269. Les nombreux ouvrages publiés par Képler, qu'il n'aurait pas cédés, disait-il, pour le duché de Saxe, quoique leur produit, joint à ses autres revenus, fût à peine suffisant pour subvenir aux besoins de sa famille, ont été analysés par Delambre, dans le premier volume de son *Histoire de l'Astronomie moderne;* on y trouve les principes de l'Astronomie que l'on suit maintenant, et tous les détails des recherches par lesquelles il a été conduit à la découverte des trois lois suivantes, connues sous le nom de *lois de Képler.*

I. Les orbites, ou les courbes que décrivent les centres de gravité des planètes, sont des ellipses, dont l'un des foyers est occupé par le centre du Soleil;

II. Les aires des secteurs décrits par les rayons vecteurs qui joignent le centre de la planète à celui du Soleil, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire;

III. Les carrés des temps des révolutions des planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites, ou comme les cubes de leurs moyennes distances au centre du Soleil.

C'est par les observations de Mars que les deux premières de ces lois ont été trouvées. Képler, en discutant les observations de Tycho, parvint bientôt à reconnaître que l'orbite de cette planète n'est pas un cercle; mais ce ne fut qu'après s'être longtemps fatigué, en supposant que cette orbite est un ovale, plus large par un bout que par l'autre, qu'il employa l'ellipse. Le succès fut complet: il a été confirmé par les observations pour les orbites de toutes les planètes autour du Soleil, et pour celles des satellites autour de leurs planètes.

Suivant le système de Copernic, il n'y avait point de centre commun pour les mouvements des planètes; leurs orbites étaient des cercles, et chaque planète parcourait son orbite, en décrivant des arcs égaux dans des temps égaux. L'orbite étant une ellipse, le mouvement n'est pas uniforme, et par conséquent les arcs sont inégaux; mais d'après la deuxième loi de Képler, dont nous avons donné précédemment la démonstration, l'égalité des arcs est remplacée par celle des aires.

Les conjectures de Képler, sur l'harmonie parfaite des mouvements célestes, l'ont conduit à la découverte de sa troisième loi; il avait prévu qu'il devait exister entre ces mouvements une loi simple et constante: sa recherche, dont il s'est occupé pendant dix-sept ans, lui a coûté de longs et pénibles calculs; aussi sa joie fut telle, après l'avoir trouvée, qu'il craignait que ce ne fût qu'une illusion. A présent tous ces calculs seraient bien simples, car, en désignant par T, t, les temps des révolutions de deux planètes; par R, r, leurs moyennes distances au centre du Soleil, et par x l'exposant du rapport, on aurait l'équation exponentielle

$$\left(\frac{R}{r}\right)^x = \frac{T}{t},$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes, et dégageant ensuite l'inconnue,

$$x \log \frac{R}{r} = \log \frac{T}{t}, \quad x = \frac{\log T - \log t}{\log R - \log r}.$$

Pour Mars, on a

$$T = 686{,}9796, \qquad R = 1{,}52369;$$

et pour la Terre,

$$t = 365{,}2564, \qquad r = 1;$$

en substituant les logarithmes de ces nombres dans l'équation précédente, la valeur de x devient

$$x = \frac{2,8369438 - 2,5622978}{0.1828966 - 0} = \frac{2743460}{1828966}.$$

Cette valeur de x est exprimée par une fraction irréductible dont les termes sont de grands nombres; en cherchant leur plus grand commun diviseur, et formant les fractions approchées par la règle des fractions continues, il viendra

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \dfrac{2743460}{1828966} & \dfrac{1828966}{1} & \dfrac{914494}{1} & \dfrac{914472}{1} & \dfrac{22}{41566} & \dfrac{20}{1} & \dfrac{2}{10} & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 41566 & \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{124700}{83133}. \end{array}$$

La fraction $\frac{3}{2}$ est plus petite que celle qui représente la valeur de x, mais la différence est moindre qu'un cent-millième d'unité; en mettant cette fraction à la place de x, on a

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{T}{t}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^3;$$

ce qui est la traduction algébrique de la troisième loi de Képler.

270. A l'époque où Képler fit la découverte de ces lois elles ne furent pas appréciées, parce qu'on ne concevait pas les applications que l'on en pourrait faire.

Un demi-siècle plus tard Newton reprit, comme son propre bien, les matériaux du système du monde qui avaient été préparés par ses prédécesseurs; en y ajoutant ses propres découvertes il composa, dans le style de la Géométrie ancienne,

son fameux livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, qui a exigé le concours des géomètres, des astronomes et des artistes, pendant plus d'un siècle, pour l'éclaircir et le compléter.

Après avoir démontré les lois de Képler, Newton les a employées pour prouver, comme nous avons vu qu'il l'avait déjà fait pour la Lune, que c'est par l'action de la pesanteur que la Terre et les autres planètes sont retenues dans les orbites qu'elles décrivent autour du Soleil.

Nous allons chercher l'intensité de cette force, en combinant les lois de Képler, par le moyen des formules générales du mouvement varié.

L'orbite de chaque planète étant une ellipse, que l'on peut considérer comme décrite par le rayon vecteur qui joint le centre du Soleil, placé au foyer, et le centre de la planète, nous chercherons d'abord l'équation de l'ellipse rapportée à ce rayon, ou son équation polaire.

L'ellipse est l'une des courbes qu'on a nommées sections coniques, parce qu'on les obtient en coupant un cône droit par un plan; on peut aussi définir ces courbes en considérant leurs propriétés lorsqu'elles sont tracées sur un plan.

Pour décrire une ellipse, menons deux lignes droites qui se coupent à angles droits au point C (*fig.* 146), prenons à volonté, sur l'une de ces droites, deux parties égales $CB = CA = a$, et sur l'autre droite prenons deux parties plus petites que les premières et égales entre elles, $CD = CE = b$; la droite $AB = 2a$ est le grand axe, et $DE = 2b$ le petit axe de l'ellipse; du point D comme centre, et avec un rayon égal au demi grand axe, décrivons deux arcs de cercle qui coupent le grand axe aux points F, F'; ces points se nomment

les foyers de l'ellipse, et l'on appelle *excentricité* la distance $CF = CF'$ de son centre C à l'un de ses foyers.

Coupons le grand axe au point K, formons le triangle FMF', qui a pour base la double excentricité FF', et dont les côtés $FM = BK$, $F'M = AK$, sont deux rayons vecteurs; le sommet M de ce triangle sera l'un des points de l'ellipse, et il en sera de même pour tous les triangles formés sur la base FF', avec d'autres divisions du grand axe, ou d'autres rayons vecteurs, ce qui fournit une méthode simple et facile pour décrire l'ellipse par points.

Du point M abaissons sur le grand axe la perpendiculaire, ou l'ordonnée MP; le triangle FMF' donnera, par un théorème de géométrie que nous avons déjà appliqué pour la composition des forces,

$$\overline{F'M}^2 = \overline{F'F}^2 + \overline{FM}^2 + 2FF' \times FM \cos MFP.$$

Nommons r, r' les rayons vecteurs FM, F'M; faisons le rapport de l'excentricité au demi grand axe $\frac{CF}{a} = e$, et désignons par θ l'angle MFP; en substituant ces valeurs, la formule devient

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4ae.r\cos\theta.$$

D'ailleurs nous avons vu que la somme des rayons vecteurs est égale au grand axe, ce qui donne

$$r' = 2a - r, \quad r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2;$$

en substituant cette valeur de r'^2 dans l'équation précédente, il viendra

$$r^2 + 4a^2e^2 + 4ae.r\cos\theta = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

ce qui donnera, en supprimant les facteurs communs dans les deux membres, et transposant,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}:$$

c'est l'équation polaire de l'ellipse.

271. Les deux premières lois de Képler vont nous servir pour chercher l'intensité de la force par laquelle la Terre et les autres planètes sont assujetties à tourner autour du Soleil.

Soit F (*fig.* 146) le foyer commun des orbites elliptiques des planètes occupé par le Soleil; menons par ce point les axes rectangulaires FX, FY, dans le plan de l'orbite de l'une des planètes, par exemple dans l'orbite de la Terre.

Le centre de la planète étant au point M de son orbite BMDAE, représentons par t le temps qu'elle a mis à décrire l'arc BM; pendant le même temps son rayon vecteur r a décrit le secteur elliptique dont l'angle $\text{BFM} = \theta$, et pendant l'instant suivant dt il décrira le secteur élémentaire MFM'; l'aire de ce secteur est égale à $\frac{1}{2}r^2d\theta$: si l'on désigne par $\frac{1}{2}c$ l'aire du secteur décrit par le rayon vecteur r, pendant l'unité de temps, on aura, d'après la deuxième loi de Képler,

$$\frac{\frac{1}{2}r^2d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{2}c}{1}, \quad \text{ou} \quad r^2d\theta = cdt. \qquad (1)$$

Soit R la force accélératrice qui agit sur la planète; cette force est dirigée vers le centre du Soleil, elle agit suivant le rayon vecteur r qui joint ce centre à celui de la planète, et l'on a $\text{R}\cos\theta$, $\text{R}\sin\theta$ pour ses composantes suivant les axes rectangulaires; en les substituant à la place de X, Y, dans les

équations générales du mouvement varié (253), et observant qu'elles doivent être prises avec le signe moins, parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées, on a les deux équations du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{R}\cos\theta, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{R}\sin\theta.$$

La première de ces équations étant multipliée par $2dx$, la seconde par $2dy$, en ajoutant les produits, on aura

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = -2\mathrm{R}\,(dx\cos\theta + dy\sin\theta);$$

cette équation a pour intégrale

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \mathrm{C} - 2\int \mathrm{R}\,(dx\cos\theta + dy\sin\theta): \qquad (2)$$

on a d'ailleurs les deux équations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

et en prenant leurs différentielles,

$$dx = \cos\theta\,dr - rd\theta\sin\theta, \quad dy = \sin\theta\,dr + rd\theta\cos\theta;$$

d'où l'on déduit facilement

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2d\theta^2, \quad dx\cos\theta + dy\sin\theta = dr;$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation (2), et le dénominateur dt^2 étant remplacé par sa valeur $\frac{r^4d\theta^2}{c^2}$, prise dans l'équation (1), on aura

$$\frac{c^2dr^2}{r^4d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2} = \mathrm{C} - 2\int \mathrm{R}dr. \qquad (3)$$

L'équation polaire de l'ellipse peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{a(1-e^2)};$$

et l'on a, pour sa différentielle,

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{e\,d\theta \sin\theta}{a(1-e^2)};$$

en faisant passer $d\theta$ dans le premier membre, élevant les deux membres au carré, et remplaçant $e^2 \sin^2\theta$ par sa valeur prise dans l'équation précédente, il viendra

$$\frac{dr^2}{r^4 d\theta^2} = \frac{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)}{a^2 r^2 (1-e^2)} = \frac{2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)};$$

ce coefficient différentiel étant remplacé par sa valeur, l'équation (3) devient

$$\frac{2e^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{a^2(1-e^2)} = C - 2\int R\,dr;$$

en la différentiant, on aura

$$\frac{2e^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{dr}{r^2} = 2R\,dr,$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{e^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Ce résultat fait voir que l'intensité de la force R varie en raison inverse du carré de la distance r du centre du Soleil au centre de la planète.

272. En prenant pour unité de longueur la distance du centre du Soleil au centre de la planète, ou en faisant le

rayon vecteur $r = 1$, la force $R = \frac{c^2}{a(1-e^2)}$; les quantités constantes a, e et c, ne sont pas les mêmes pour deux planètes différentes, mais, en nous servant de la troisième loi de Képler, nous allons prouver que la force R agit suivant la même loi sur toutes les planètes du système solaire.

Désignons par T le temps de la révolution entière de la planète; puisque c représente le double de l'aire du secteur elliptique décrit par son rayon vecteur, pendant l'unité de temps, cT sera le double de l'aire de l'orbite; l'aire de l'ellipse qui forme cette orbite a aussi pour expression $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, d'où il résulte qu'on a $c = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$. Si l'on met cette valeur de c dans celle de la force R, à l'unité de distance, on aura

$$R = \frac{c^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Le rapport $\frac{a^3}{T^2}$, du carré du temps de la révolutiou entière au cube du demi grand axe de l'orbite, est le même pour deux planètes différentes, d'après la troisième loi de Képler; donc à l'unité de distance, et en général à des distances égales, la force accélératrice R est la même pour ces planètes, son intensité ne varie qu'à des distances inégales; à une même distance du Soleil, la force motrice est proportiounelle à la masse.

Nous avons vu (**266**) que la force qui retient la Lune dans l'orbite qu'elle décrit autour de la Terre, est la pesanteur terrestre, dont l'intensité suit la raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre; l'orbite de la Lune est une ellipse dont le centre de la Terre occupe l'un des foyers,

et il en est de même pour les autres planètes qui ont des satellites.

Le résultat de l'analyse précédente fait voir que le rapport inverse du carré de la distance au centre du Soleil est aussi la loi suivant laquelle agit la force qui retient les planètes, et qui leur fait décrire des orbites elliptiques autour du Soleil; tous les corps du système solaire sont soumis à cette loi, dont la découverte est due à Newton; leurs mouvements résultent d'une force d'impulsion et d'une force qui agit en raison inverse du carré de leur distance au centre du Soleil; malgré les perturbations produites par ces corps, qui réagissent les uns sur les autres, avec des forces motrices proportionnelles à leurs masses, la théorie et les observations s'accordent pour confirmer cette grande loi, que Newton a nommée *attraction*, et qu'on appelle aussi *gravitation*, ou pesanteur universelle.

273. Proposons-nous de trouver l'expressiou de la vitesse avec laquelle la Terre se meut, en décrivant son orbite.

Cette vitesse étant désignée par v, on a

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2};$$

en éliminant dt^2 entre cette équation et l'équation (1), on aura

$$v^2 = \frac{c^2 dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2}.$$

Nous avons trouvé, dans l'avant-dernier article,

$$\frac{dr^2}{r^4 d\theta^2} = \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)};$$

cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, il

viendra

$$v^2 = \frac{c^2(2a-r)}{a^2r(1-e^2)} = \frac{c^2}{a^2(1-e^2)}\left(\frac{2a}{r}-1\right);$$

et en substituant la valeur du coefficient $\frac{c^2}{a^2(1-e^2)} = \frac{4\pi^2a^2}{T^2}$, on aura

$$v = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{2a}{r}-1}.$$

La seule variable qui entre dans l'expression de cette vitesse est le rayon r; si l'orbite était circulaire, son rayon serait constant, et la Terre décrirait cette orbite avec un mouvement uniforme.

Dans l'orbite elliptique de la Terre, on appelle le grand axe AB la ligne des *apsides;* l'apside éloignée, ou supérieure A, se nomme *aphélie,* loin du Soleil. On appelle *périhélie,* près du Soleil, l'apside inférieure B, ou le point de l'orbite le plus près du foyer F, occupé par le centre du Soleil.

Puisque, d'après la deuxième loi de Képler, le rayon vecteur r décrit, dans des temps égaux, des secteurs dont les aires sont égales, les angles de ces secteurs doivent être d'autant plus ouverts que les rayons sont plus courts; et par conséquent la plus grande vitesse de la planète doit avoir lieu lorsqu'elle est vers le périhélie de son orbite, et c'est vers l'aphélie, ou au point de l'orbite le plus éloigné du Soleil, que la planète doit se mouvoir avec la plus petite vitesse; c'est ce qui est indiqué par la formule générale de la vitesse, et ce que l'on rendra encore plus sensible en y introduisant les expressions du rayon vecteur, qui devient $r = a(1-e)$ au périhélie, et $r = a(1+e)$ à l'aphélie. En substituant ces

valeurs de r, on trouve les vitesses

$$V = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{ au périhélie,}$$

$$v = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{ à l'aphélie.}$$

Dans ces formules, les lettres représentent des nombres connus, ou déterminés par les observations : le rapport de la demi-circonférence au rayon, représenté par $\pi = 3{,}1416$; le temps employé par la Terre à décrire son orbite, ou à revenir à la même étoile, $T = 365^j{,}2564 = 31558153$ secondes. Suivant Delambre, la distance moyenne du centre du Soleil à celui de la Terre, ou le demi grand axe de son orbite $a = 39229000$ lieues de 2000 toises, ou de 3898 mètres; la plus grande distance $AF = 39887261$, la plus courte distance $FB = 38570739$, d'où l'on déduit que l'excentricité $CF = 658261$, et l'excentricité en parties de l'unité $e = \frac{CF}{a} = 0{,}01678$.

En substituant ces nombres à la place des lettres, et calculant par logarithmes, on trouvera

$\log 2\pi$	0.7981809	
$\log a$	7.5936072	
c. $\log T$	2.5008884	
	10.8926765	
$\frac{1}{2}\log(1+e)$	0.0036135	
c. $\frac{1}{2}\log(1-e)$	10.0036747	
$\log V$	20.8999647	
		$V = 7^l{,}942636.$
	10.8926765	
$\frac{1}{2}\log(1-e)$	$\bar{1}.9963253$	
c. $\frac{1}{2}\log(1+e)$	9.9963865	
$\log v$	20.8853883	
		$v = 7^l{,}680477.$

Ces vitesses ont un facteur commun $\frac{2\pi a}{T} = 7^l,80458$; leur différence dépend de l'excentricité.

Reprenons l'équation (1)

$$r^2 d\theta = c dt, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2};$$

le coefficient différentiel $\frac{d\theta}{dt}$ exprime la *vitesse angulaire* de la Terre, ou la vitesse avec laquelle son rayon vecteur $FM = r$ décrit le secteur BFM; en le considérant comme un secteur de cercle, et décrivant l'arc θ avec le rayon $= 1$, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T};$$

cette dernière expression, dans laquelle π représente la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon, est celle de la vitesse angulaire moyenne de la Terre.

Décrivons un cercle du foyer F comme centre, avec le rayon FB, et imaginons qu'une planète fictive partant du périhélie B, au même instant que la Terre, se meuve sur la circonférence de ce cercle, avec une vitesse uniforme égale à la moyenne vitesse de la Terre. La plus grande vitesse de la Terre ayant lieu au périhélie, elle devance d'abord la planète fictive; mais il y a un instant où les deux planètes ont la même vitesse, ensuite la distance qui les sépare diminue, et elles arrivent ensemble à l'aphélie. Dans la seconde moitié de l'orbite, les mouvements relatifs sont inverses: c'est d'abord la planète fictive qui devance la Terre, leurs vitesses deviennent encore égales, mais ensuite la Terre, par l'accélération de sa vitesse, se rapproche successivement de la planète fictive, et elles arrivent en même temps au périhélie.

Au bout du temps t, le rayon vecteur de la Terre étant FM, soit FN celui de la planète fictive; l'angle MFN, compris entre ces deux rayons vecteurs, se nomme l'*équation du centre;* c'est la quantité qu'il faut ajouter au mouvement uniforme de la planète fictive pour avoir le mouvement réel de la Terre.

L'équation du centre devient négative, lorsque les deux planètes ont passé l'aphélie, et qu'elles se meuvent dans la seconde moitié de l'orbite.

L'année sidérale, ou le temps de la révolution de la Terre $T = 365^j,25638$; en faisant $2\pi = 360$ degrés, on aura la vitesse angulaire moyenne de la Terre, ou l'arc de son orbite, qu'elle décrit dans un jour moyen.

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{360^\circ}{365,25638} = \frac{21600'}{365,25638} = 59'8''.$$

Une année équinoxiale est plus courte que l'année sidérale, parce que les équinoxes ont un mouvement rétrograde, ou en sens contraire de celui de la Terre; ce mouvement annuel est à peu près de $50'',1$. Le temps que le centre de la Terre met à parcourir ce petit arc est de $0^j,01412$; en le retranchant de l'année sidérale, on trouve que l'année équinoxiale est de $365^j,24226$, ou $365^j5^h48'51''$.

CHAPITRE X.

DES MOMENTS D'INERTIE.

274. On a nommé, d'après Euler, *moment d'inertie* d'un corps, relativement à une droite, ou à un axe, la somme des produits de chaque molécule de ce corps par le carré de sa distance à cet axe; nous allons donner quelques détails sur les calculs par lesquels on détermine ces quantités, en supposant les corps homogènes, et nous bornant aux propositions les plus simples, dont nous aurons besoin de faire usage dans les chapitres suivants.

Proposons-nous de chercher le moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle par rapport à l'axe perpendiculaire à sa base, qui passe par son centre de gravité.

Imaginons que le parallélipipède (*fig.* 147) soit coupé à son centre de gravité par un plan parallèle à sa base; ABCD étant la section, prenons le point O, où se trouve le centre de gravité, pour l'origine des coordonnées, et menons les axes OX, OY, parallèles aux côtés AB et AD. Soit m la projection de l'un des éléments du parallélipipède sur cette section, x, y, les coordonnées de cet élément; ses dimensions infiniment petites sont les différentielles dx, dy, dz, et il a pour volume leur produit $dxdydz$; la somme des carrés de ses coordonnées x^2+y^2, exprime le carré de sa distance à l'axe des z, qui passe par le centre de gravité du parallélipipède, par conséquent le moment d'inertie sera exprimé par

la formule

$$\int r^2dm = \int (x^2+y^2)\, dxdydz.$$

En intégrant d'abord par rapport à z, et prenant l'intégrale depuis $z=\frac{1}{2}h$ jusqu'à $z=-\frac{1}{2}h$, la hauteur du parallélipipède étant représentée par h, on a

$$h\int (x^2dxdy + y^2dydx);$$

l'intégration par rapport à y donne

$$h\int \left(yx^2dx + \frac{y^3}{3}dx\right);$$

en prenant cette intégrale depuis $y=+\frac{1}{2}b$ jusqu'à $y=-\frac{1}{2}b$, ou, ce qui revient au même, en faisant $y=\frac{1}{2}b$, et doublant, il viendra

$$h\int \left(bx^2dx + \frac{b^3}{12}dx\right);$$

une intégration semblable par rapport à x donnera

$$h\left(\frac{a^3b}{12} + \frac{ab^3}{12}\right) = \frac{1}{12}abh(a^2+b^2):$$

c'est l'expression du moment d'inertie demandé.

Proposons-nous, pour deuxième exemple, de chercher le moment d'inertie d'un cylindre vertical, par rapport à son axe.

Le cylindre est engendré par la révolution d'un rectangle de même hauteur h que son axe, et dont la base est égale au rayon OA $=a$ (*fig.* 148) du cercle qui forme la base du cylindre; menons, dans ce cercle, les deux rayons OB, OC,

infiniment près l'un de l'autre, et appelons θ l'angle AOB, ou l'arc décrit du centre O, avec l'unité pour rayon, entre les côtés de cet angle, $d\theta$ sera la mesure de l'angle infiniment petit BOC.

Du centre O, et avec les rayons r et $r+dr$, décrivons entre les rayons OB, OC, les arcs pq, $p'q'$; l'arc $pq=rd\theta$, et le quadrilatère $pqq'p'$ peut être pris pour un rectangle qui a pour mesure $rd\theta \times dr = rdrd\theta$. En le considérant comme la base d'un parallélipipède dont la hauteur est dz, on aura l'élément de volume, ou l'élément de masse du cylindre, $dm=rdrd\theta dz$; multipliant chaque membre par r^2, et indiquant l'intégration, il vient, pour l'expression du moment d'inertie du cylindre,

$$\int r^2dm = \int r^3drd\theta dz; \qquad (a)$$

les intégrales du second membre s'obtiennent très facilement.

On a d'abord $\int r^3dr = \frac{r^4}{4} = \frac{a^4}{4}$, en mettant le rayon extérieur a à la place de r.

La hauteur du cylindre est représentée par h, d'où il résulte que $\int dz = z = h$.

L'angle θ est mesuré sur le cercle qui a l'unité pour rayon, et par conséquent on a $\int d\theta = 2\pi$, pour l'intégrale relative à θ, prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$.

D'après ces trois intégrations, la formule devient

$$\int r^2dm = \frac{a^4}{4} \times h \times 2\pi = \frac{\pi a^2 h}{2} a^2;$$

ce qui fait voir que le moment d'inertie du cylindre est égal au produit de la moitié de son volume par le carré du rayon de sa base.

69..

275. Parmi tous les solides, ceux qui sont le plus souvent employés sont les solides de révolution; pour calculer le moment d'inertie de l'un quelconque de ces corps, on pourra se servir de la formule (a), en la modifiant d'après les considérations suivantes.

Dans tout solide de révolution, l'intégrale $\int d\theta = 2\pi$, en la prenant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$; en intégrant depuis $r = 0$ jusqu'à $r = y$, on a $\int r^3 dr = \frac{y^4}{4}$; substituant ces intégrales et remplaçant z par x, on aura

$$\int r^2 dm = \int \frac{y^4}{4} 2\pi dx = \frac{1}{2}\pi \int y^4 dx. \qquad (b)$$

Pour appliquer cette formule à quelques exemples, nous nous proposerons d'abord de chercher le moment d'inertie du cône engendré par la révolution du triangle rectangle AOB (*fig.* 149), autour du côté AO, qui coïncide avec l'axe des x, et dont le sommet A est à l'origine des coordonnées.

La droite AB, qui décrit la surface convexe du cône, fait avec son axe un angle dont nous désignerons la tangente par α; elle a pour équation

$$y = \alpha x:$$

cette valeur de y étant substituée dans la formule précédente, on aura

$$\int r^2 dm = \frac{1}{2}\pi \alpha^4 \int x^4 dx;$$

en faisant l'axe du cône AO $= l$, le rayon de sa base OB $= a$, et intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, on trouve que le moment d'inertie du cône a pour expression

$$\int r^2 dm = \frac{1}{10}\pi \alpha^4 l^5 = \frac{1}{10}\pi a^4 l = \frac{\pi a^2 l}{3} \cdot \frac{3a^2}{10}.$$

On voit par ce résultat, que la densité étant l'unité, le moment d'inertie du cône est le produit de son volume, ou de sa masse, par les $\frac{3}{10}$ du carré du rayon de sa base.

Si l'on intègre depuis $x = AP$ jusqu'à $x = AO$, en faisant, pour simplifier les calculs, $AO = l$, $AP = k$, $AO - AP = OP = h$, $BO = a$, $DP = b$, il viendra

$$\frac{1}{10}\pi\alpha^4(l^5 - k^5);$$

c'est le moment d'inertie du tronc de cône, engendré par la révolution du trapèze OBDP, rapporté à l'axe de cė solide; on peut donner une autre forme à son expression, en y introduisant les rayons de ses bases.

Les triangles rectangles AOB, APD, donnent

$$l = \frac{a}{\alpha}, \quad k = \frac{b}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{a-b}{l-k} = \frac{a-b}{h};$$

ces valeurs étant substituées, l'expression du moment d'inertie du tronc du cône devient

$$\frac{1}{10}\pi\left(\frac{a-b}{h}\right)^4 \frac{a^5-b^5}{\left(\frac{a-b}{h}\right)^5} = \frac{1}{10}\pi h\,\frac{a^5-b^5}{a-b}.$$

Si l'on suppose la base $b = 0$, on aura la valeur du moment d'inertie que nous avons déjà trouvée pour le cône entier.

En faisant $a = b$, la fraction, et par conséquent la quantité dont elle est facteur, devient $\frac{0}{0}$; mais en divisant le numérateur par le dénominateur, on a

$$\frac{1}{10}\pi h(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4);$$

et en faisant ensuite $a = b$, cette quantité donne le moment d'inertie du cylindre que nous avons déjà trouvé.

Proposons-nous, pour deuxième exemple, de chercher le moment d'inertie de la sphère, par rapport à l'un de ses diamètres.

Soit AMB (*fig.* 150) le demi-cercle générateur, dont la révolution autour du diamètre AB, qui coïncide avec l'axe des x, décrit la sphère.

La droite MP, perpendiculaire au diamètre $AB = 2a$, est une ordonnée du cercle, et l'on a, pour son équation,

$$y^2 = 2ax - x^2, \quad y = \sqrt{2ax - x^2};$$

cette valeur de y étant substituée dans la formule (b), on aura

$$\int r^2 dm = \tfrac{1}{2}\pi \int (4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)\, dx; \qquad (c)$$

en intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2a$, et réduisant, il vient

$$\frac{8}{15}\pi a^5 = \frac{4}{3}\pi a^3 \times \frac{2}{5} a^2:$$

c'est le moment d'inertie de la sphère entière; on voit qu'il est égal au produit de son volume, ou de sa masse, par les $\frac{2}{5}$ du carré de son rayon.

Pour trouver l'expression du moment d'inertie d'un segment de sphère dont la flèche $AP = f$, par rapport au diamètre perpendiculaire à sa base, il faut intégrer le second membre de la formule (c), depuis $x = 0$ jusqu'à $x = f$; on aura

$$\frac{1}{2}\pi f^3 \left(\frac{4}{3}a^2 - af + \frac{1}{5}f^2\right).$$

C'est par rapport à un axe qu'on exprime la valeur du moment d'inertie d'un corps, parce que cette quantité est l'une de celles qu'il est nécessaire de connaître pour déterminer le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe.

276. Dans toutes les questions sur les moments d'inertie dont nous venons de nous occuper, nous n'avons considéré que les moments d'inertie de ces corps par rapport aux axes qui passent par leurs centres de gravité. Souvent la position de cet axe n'est pas la même que celle de l'axe de rotation; mais lorsqu'on connaît le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité, on trouve facilement, par la règle que nous allons expliquer, le moment d'inertie de ce corps par rapport à un autre axe parallèle au premier.

Le point A étant le centre de gravité du corps, menons par ce point les trois axes rectangulaires AX, AY, AZ (*fig.* 151); supposons que le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical AZ soit connu, et proposons-nous de chercher la valeur de ce moment par rapport à un autre axe A'Z' parallèle à AZ, la distance $AA' = a$ de ces deux axes étant connue.

Désignons par b, c, les coordonnées AB, BA', du point A' où l'axe A'Z' coupe le plan des x et y; le triangle rectangle ABA' donnera $a^2 = b^2 + c^2$.

Soit m l'une des molécules du corps, et $mE = r$, $mF = r'$, les distances de cette molécule aux deux axes AZ, A'Z'; abaissons la droite mp perpendiculaire sur le plan des x et y; menons pC parallèle à AY, joignons Ap, et représentons par x, y, les coordonnées AC, Cp, du point p; en observant que $pA = mE = r$, nous aurons $r^2 = x^2 + y^2$.

La distance $mF = pA' = r'$; si l'on mène pq parallèle à

AX, le triangle rectangle $A'qp$ donnera

$$r'^2 = (x-b)^2 + (c-y)^2 = x^2 - 2bx + b^2 + c^2 - 2cy + y^2;$$

en remplaçant $x^2 + y^2$ et $b^2 + c^2$, par les valeurs que nous venons de trouver, on aura

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2bx - 2cy;$$

multipliant tous les termes par dm et intégrant, cette équation devient

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2b\int x dm - 2c\int y dm.$$

Le centre de gravité étant à l'origine, on a $\int x dm = 0$ et $\int y dm = 0$, car, en divisant ces intégrales par la masse du corps, les quotients représenteraient les distances du centre de gravité aux plans des y et z et des x et z.

L'intégrale $\int dm$ est égale à la masse M du corps; ainsi l'équation précédente se réduit à

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + \mathrm{M}a^2.$$

Ce résultat fait voir que le moment d'inertie par rapport au deuxième axe est égal au moment d'inertie par rapport au premier axe, qui passe par le centre de gravité du corps, plus le produit de sa masse par le carré de la distance des deux axes.

Pour donner une autre forme à l'équation que nous venons d'obtenir, on peut l'écrire de la manière suivante:

$$\int r'^2 dm = \mathrm{M}\left(\frac{\int r^2 dm}{\mathrm{M}} + a^2\right);$$

et si l'on fait, pour abréger, $\frac{\int r^2 dm}{M} = k^2$, on aura

$$\int r'^2 dm = M(k^2 + a^2).$$

Il résulte de ces formules, ou de la règle qui en est la traduction, que le moment d'inertie d'un corps quelconque, par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité, est plus petit que par rapport à un autre axe parallèle au premier.

Nous avons trouvé $\frac{1}{12} abh(a^2 + b^2)$ pour le moment d'inertie du parallélipipède rectangle, rapporté à l'axe perpendiculaire à sa base, qui passe par son centre de gravité; si l'on demande ce moment d'inertie par rapport à l'une des arêtes du parallélipipède, en appliquant la règle précédente, on trouvera

$$\frac{1}{12} abh(a^2 + b^2) + abh\frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{1}{3} abh(a^2 + b^2).$$

Ce moment d'inertie est quadruple du premier.

CHAPITRE XI.

DU MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE FIXE.

Le mouvement curviligne peut être diversifié d'autant de manières qu'il y a de sortes de lignes courbes, mais il n'y en a qu'un petit nombre en usage dans la Mécanique, et le mouvement circulaire est celui dont les applications se présentent le plus fréquemment; tel est le mouvement de rotation autour d'un axe fixe, dont la théorie a été approfondie par les géomètres; ils ont trouvé des formules générales, soit pour le cas du mouvement uniforme, soit pour celui du mouvement varié. Nous allons démontrer les principales de ces formules, et nous en ferons plus loin quelques applications.

Du mouvement de rotation uniforme.

277. Proposons-nous de chercher quel sera le mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et, pour rendre l'analyse de la question plus facile, considérons ce corps comme un système de molécules, ou de points matériels, liés entre eux et à l'axe fixe d'une manière invariable.

Les forces appliquées à ce système feront décrire à chaque molécule un cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe fixe, qui passera par les centres de tous ces cercles. Toutes les molécules, dont nous représenterons les masses

par m, m', m'', etc., décriront, dans le même temps, des arcs d'un même nombre de degrés, et les longueurs de ces degrés seront proportionnelles à celles de leurs rayons.

On appelle *vitesse angulaire*, celle qui est mesurée sur la circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité; cette vitesse est la même pour tous les points matériels du système.

Nous supposerons que toutes les forces appliquées au système agissent ensemble et instantanément, ce qui produira un mouvement de rotation uniforme.

Menons les trois axes rectangulaires OX, OY, OZ (*fig.* 152), de manière que l'axe OZ soit vertical; nous rapporterons les masses m, m', m'', etc., du système à ces axes, au moyen des coordonnées x, y, z, et nous prendrons l'axe vertical OZ pour l'axe fixe.

Si les forces qui impriment le mouvement aux masses m, m', m'', etc., en les supposant libres, ont des directions obliques par rapport à l'axe fixe OZ, on décomposera chacune de ces forces en deux autres qui agiront, l'une parallèlement à cet axe, et l'autre dans un plan qui lui soit perpendiculaire; nous n'aurons pas égard aux composantes parallèles à l'axe fixe, parce qu'elles ne produisent aucun effet sur le mouvement de rotation autour de cet axe; en appelant v, v', v'', etc., les vitesses des composantes dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe OZ, leurs quantités de mouvement seront mv, $m'v'$, $m''v''$, etc.

Représentons par r, r', r'', etc., les distances de l'axe fixe aux points matériels m, m', m'', etc., ou les rayons des cercles qu'ils décrivent autour de cet axe, et appelons ω la vitesse angulaire du système; les points matériels auront pour vitesses absolues $r\omega$, $r'\omega$, $r''\omega$, etc., et leurs quantités de mouvement seront exprimées par $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, etc.

On a donc les forces, ou quantités de mouvement suivantes :

$$mv,\ m'v',\ m''v'',\ \text{etc.},\qquad mr\omega,\ m'r'\omega,\ m''r''\omega,\ \text{etc.},$$

et, d'après le principe de d'Alembert, la somme des premières forces, prise dans la direction qui lui a été imprimée avant la percussion, doit faire équilibre à la somme des secondes forces, ou à celle du mouvement circulaire, prise avec un signe contraire, ou suivant une direction opposée à celle du mouvement du système.

Puisque ces deux sommes de quantités de mouvement égales tendent à faire tourner le système en sens contraire, autour de l'axe fixe OZ, il en résulte que les moments pris par rapport à cet axe seront égaux.

Les quantités de mouvement circulaires $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, etc., auront pour moments

$$mr\omega.r + m'r'\omega.r' + m''r''\omega r'' + \text{etc.} = \omega(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.});$$

et si l'on appelle f, f', f'', etc., les perpendiculaires comprises entre l'axe OZ et les directions des quantités de mouvement mv, $m'v'$, $m''v''$, etc., la somme des moments de ces quantités de mouvement sera exprimée par $mvf + m'v'f' + m''v''f'' + \text{etc.}$; ces deux sommes étant égales, on en tire la valeur de la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{mvf + m'v'f' + m''v''f'' + \text{etc.}}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}}.$$

Considérons le cas où les vitesses v, v', v'', etc., sont toutes égales et parallèles; si l'on mène par l'axe fixe OZ, un plan parallèle à la direction de ces vitesses, les droites f, f', f'', etc., seront les perpendiculaires menées de chaque masse m, m',

m'', etc., sur ce plan. En appelant F la perpendiculaire menée sur ce même plan, du centre de gravité des masses; désignant par M leur somme, et par V leur vitesse commune, on a, par la propriété des centres de gravité,

$$mvf + m'v'f' + m''v''f'' + \text{etc.} = \text{MV.F};$$

en substituant cette valeur dans la dernière formule, on aura

$$\omega = \frac{\text{MV.F}}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}}.$$

Si le système de points matériels est partagé en deux parties, que la vitesse V ait été directement communiquée seulement à l'une des parties, en appelant L la masse de cette partie, ou la somme des points matériels qu'elle contient, et F la distance de son centre de gravité à l'axe fixe, la vitesse angulaire aura pour expression

$$\omega = \frac{\text{LV.F}}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}}.$$

Ce cas est celui d'un corps libre, animé de la vitesse V, qui frappe un autre corps en repos assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et qui lui reste adhérent.

Nous avons supposé que les molécules du système assujetti à tourner autour de l'axe fixe sont liées entre elles; dans les corps solides, ces molécules sont presque en contact : leur adhérence, plus ou moins rapprochée, est produite par une force qu'on appelle *cohésion*; l'une des molécules infiniment petites étant désignée par l'élément différentiel dm, et sa distance à l'axe fixe par r, on aura r^2dm pour le produit de cette molécule par le carré de sa distance à l'axe fixe; la somme

de toutes les quantités semblables dont le corps est composé, ou son moment d'inertie, sera exprimée par l'intégrale $\int r^2 dm$, et la formule précédente deviendra

$$\omega = \frac{\text{LV.F}}{\int r^2 dm}.$$

Telle est la valeur de la vitesse angulaire; elle a pour expression le quotient de la somme des moments des forces sollicitantes, divisée par le moment d'inertie de la masse du système.

278. Lorsqu'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe auquel il est attaché, est mis en mouvement par le choc instantané d'un autre corps, la communication du mouvement produit une percussion; il est important d'en déterminer les effets sur l'axe fixe, et d'établir les conditions qui doivent être satisfaites pour que cet axe n'éprouve aucun choc : nous allons nous occuper de ces deux questions.

D'après ce qu'on a vu dans le problème précédent, l'axe fixe, ou l'axe vertical OZ, est coupé au point O par le plan horizontal dans lequel sont menés les axes rectangulaires OX, OY, et qui renferme la droite GH suivant laquelle se meut, avant le choc, le corps choquant dont la masse est désignée par L, et la vitesse par V. Nous prendrons le point G pour le centre de gravité de la masse L, et la perpendiculaire OQ = F, menée du point O sur la droite GH, ou sur son prolongement, sera la distance de cette droite à l'axe fixe.

Après le choc, la masse totale M est animée de la vitesse angulaire ω; cherchons d'abord ses composantes parallèles aux axes des x et des y.

Soit p la projection de l'un des éléments dm de la masse M sur le plan des x et y; le cercle décrit par cet élément

aura pour rayon $Op = r$. Menons au point p une tangente qui coupe en q et q' les axes des x et des y; le rayon Op, ou r, est perpendiculaire à cette tangente, qui forme l'hypoténuse du triangle rectangle qOq'; en la prolongeant vers p', ce triangle donnera, pour les expressions des cosinus des angles que la direction de la vitesse forme avec les axes des x et des y,

$$\cos p'qX = \frac{y}{r}, \qquad \cos pq'Y = -\frac{x}{r}.$$

Le point matériel, ou l'élément de masse dm, se meut avec la vitesse $r\omega$. Sa quantité de mouvement $r\omega . dm$ étant multipliée par les cosinus des angles formés par sa direction avec les axes des x et des y, on a

$$\frac{y}{r} r\omega dm = \omega y dm, \quad -\frac{x}{r} r\omega dm = -\omega x dm;$$

ces produits sont les composantes de la quantité de mouvement de l'élément dm, parallèles aux axes des x et des y; les composantes de la quantité de mouvement de la masse totale M seront les intégrales

$$\int \omega y dm = \omega \int y dm, \quad -\int \omega x dm = -\omega \int x dm.$$

Chacune de ces intégrales devra être prise dans toute l'étendue de la masse.

En prenant les moments de ces quantités de mouvement par rapport au plan des x et y, on aura

$$\omega \int yz dm, \quad -\omega \int xz dm.$$

Les quantités de mouvement et les moments de la masse totale M, peuvent être représentés par d'autres expressions.

Soit P la projection du centre de gravité de cette masse sur le plan des x et y, en désignant par $x_{,}$ et $y_{,}$ les coordonnées du point P, et par $r_{,}$ sa distance OP de l'axe fixe, ou le rayon du cercle qu'il décrit autour de cet axe, la quantité de mouvement de la masse entière sera exprimée par $\mathrm{M}r_{,}\omega$; on aura

$$\mathrm{M}r_{,}\omega.\frac{y_{,}}{r_{,}}=\mathrm{M}y_{,}\omega,\quad \mathrm{M}r_{,}\omega.-\frac{x_{,}}{r_{,}}=-\mathrm{M}x_{,}\omega,$$

pour ses composantes parallèles aux axes des x et des y; et si leurs distances au plan des x et y sont représentées par z' et z'', on aura

$$\omega\mathrm{M}y_{,}z',\quad -\omega\mathrm{M}x_{,}z'',$$

pour leurs moments par rapport à ce même plan.

Ces expressions des moments, et celles que nous avons déjà trouvées, donnent les deux équations

$$\mathrm{M}y_{,}z'=\int yzdm,\quad \mathrm{M}x_{,}z''=\int xzdm,$$

par lesquelles les valeurs de z' et z'' sont déterminées.

Toutes les forces du système se trouvent maintenant réduites aux trois suivantes :

LV, appliquée au corps choquant, suivant la direction GH; $-\omega\mathrm{M}y_{,}$ et $\omega\mathrm{M}x_{,}$, qui agissent, l'une parallèlement à l'axe des x, et l'autre parallèlement à l'axe des y; la première à une distance z' du plan des x et y, et la seconde à une distance z'' du même plan.

Ces trois forces peuvent se réduire au moins à deux, qui rencontrent l'axe fixe, et qui expriment les percussions qu'il éprouve.

Lorsque les intégrales $\int yzdm$, $\int xzdm$, qui forment les

seconds membres des équations précédentes sont nulles, on a aussi $z'=0$, $z''=0$; les deux dernières forces sont dans le plan des x et y, ainsi que la première.

C'est ce qui doit avoir lieu pour le cas de la seconde question, où les forces se font équilibre sans produire aucune percussion sur l'axe fixe; la résultante de ces forces devra donc être égale à zéro, ce qui exige que les sommes des composantes parallèles aux axes des x et des y soient nulles séparément.

Désignons par α et β les angles que la droite GH forme avec des parallèles aux axes des x et des y; la force LV du corps choquant se décomposera en deux autres forces LV $\cos\alpha$ et LV $\cos\beta$, qui agiront parallèlement aux axes des x et des y, et la condition pour que l'axe fixe n'éprouve aucune percussion sera exprimée par les équations

$$\text{LV}\cos\alpha = \omega \text{M} y_{,}, \quad \text{LV}\cos\beta = -\omega \text{M} x_{,};$$

en divisant la première par la seconde, on trouve

$$\frac{y_{,}}{x_{,}}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + 1 = 0.$$

Il est facile de voir que le facteur $\frac{y_{,}}{x_{,}}$ exprime la tangente de l'angle POX, formé par la droite OP avec l'axe des x; la droite QH étant prolongée, elle coupe l'axe des x au point n, et l'on a $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\, tn\text{X}$. En substituant ces valeurs, la dernière formule devient

$$\text{tang POX tang}\, tn\text{X} + 1 = 0;$$

ce qui prouve, d'après une formule semblable que l'on dé-

montre dans la Géométrie analytique, que les deux droites OP et QH sont perpendiculaires entre elles.

Les deux équations

$$LV \cos\alpha = \omega M y_{,}, \quad LV \cos\beta = -\omega M x_{,},$$

étant élevées au carré, en les ajoutant membre à membre, observant que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, et faisant la distance du centre de gravité de la masse M à l'axe fixe $OP = \sqrt{x_{,}^2 + y_{,}^2} = r_{,}$, il vient

$$L^2 V^2 = \omega^2 M^2 (x_{,}^2 + y_{,}^2) = \omega^2 M^2 r_{,}^2;$$

substituant la valeur de $\omega = \frac{LV.F}{\int r^2 dm}$, on trouve

$$F = \frac{\int r^2 dm}{Mr_{,}}.$$

Cette valeur de F, ou le quotient du moment d'inertie divisé par la masse multipliée par la distance de son centre de gravité à l'axe fixe, exprime la distance de l'axe fixe au point où le corps choquant doit exercer son action, perpendiculairement au plan mené par cet axe et par le centre de gravité de la masse M, pour que l'effet de la percussion sur l'axe fixe soit nul.

Ce point est remarquable, parce que c'est celui où un corps tournant autour d'un axe produit le plus grand choc; on l'a nommé *centre de percussion*.

Mouvement varié d'un corps solide, assujetti à tourner autour d'un axe fixe.

279. Dans la première question sur le mouvement d'un corps autour d'un axe fixe, dont nous venons de déterminer les principaux résultats, le mouvement qui est produit par

un choc, ou par l'effet de simples impulsions, est un mouvement uniforme. Nous allons nous occuper du cas où des forces accélératrices agissent d'une manière continue sur le corps, et lui impriment un mouvement varié.

Menons les trois axes rectangulaires OX, OY, OZ (*fig.* 153), et prenons l'axe horizontal OZ pour l'axe fixe de rotation.

Soit dm l'un des éléments du corps assujetti à tourner autour de l'axe fixe OZ; désignons par θ l'angle décrit par les points de ce corps autour de l'axe de rotation au bout du temps t, et par r leur distance à cet axe; $\frac{d\theta}{dt}$ sera la vitesse angulaire de ce corps et $r\frac{d\theta}{dt}$ sa vitesse effective; φ étant la force acccélératrice qui agit sur chaque élément, et δ l'angle que forme la direction de cette force avec la tangente au cercle que l'élément décrit autour de l'axe fixe; la force vive d'un élément du corps sera $dm.r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$.

Pendant chaque élément de temps, l'élément du corps parcourt l'espace $rd\theta$, ou l'espace $rd\theta\cos\delta$, estimé dans la direction de la force accélératrice φ; la force motrice $dm\varphi$ étant multipliée par cet espace, le produit $dm\varphi rd\theta\cos\delta$ sera la quantité d'action imprimée par cette force dans chaque élément de temps.

La force vive doit être égale au double de la quantité d'action, d'après le principe des forces vives (241); en prenant les intégrales de ces quantités, on aura

$$\int dm\ r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2\int dm\varphi rd\theta\cos\delta + \text{C},$$

ou en mettant hors du signe $\int$ la vitesse angulaire, qui est

constante pour tous les points du corps,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\int \varphi\, d\theta \cos\delta\, r dm}{\int r^2 dm} + C.$$

L'application de cette formule se présente dans le mouvement de rotation, ou d'oscillation, d'un corps pesant, qui est suspendu à l'axe fixe OZ, dont la direction est horizontale.

280. Soit P la projection de l'élément dm, sur le plan des x et y; menons PQ, PH, parallèles aux axes OX, OY, et joignons OP.

La force accélératrice $\varphi = g$, c'est la pesanteur, qui agit suivant la direction de la verticale PH sur toutes les molécules de la masse M du corps.

Nous avons désigné par δ l'angle HPT = OPQ; en faisant $OP = r$, on a $\cos\delta = \frac{x}{r}$; ces valeurs étant substituées à la place de φ et de $\cos\delta$, en observant que $x_{,}$ étant la distance du centre de gravité du corps au plan des y et z, on a $\int x dm = Mx_{,}$, l'équation précédente devient

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2gM\int x_{,} d\theta}{\int r^2 dm} + C.$$

La distance du centre de gravité du corps à l'axe fixe étant représentée par a, on a

$$x_{,} = a \sin\theta, \quad \int x_{,} d\theta = \int a \sin\theta d\theta = -a\cos\theta;$$

en substituant cette valeur de $\int x_{,} d\theta$ dans la formule, et observant que l'intégrale peut être prise avec un signe contraire, parce que l'angle θ diminue lorsque le temps t aug-

mente, on aura

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2agM\cos\theta}{\int r^2 dm} + C.$$

Déterminons la valeur de la constante C, dans l'hypothèse que la vitesse est nulle à l'origine du mouvement, lorsque l'angle $\theta = \alpha$, nous aurons

$$o = \frac{2agM\cos\alpha}{\int r^2 dm} + C, \quad C = -\frac{2agM\cos\alpha}{\int r^2 dm};$$

en mettant cette valeur à la place de C, il viendra

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2agM}{\int r^2 dm}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Lorsque la position du centre de gravité du mobile sera donnée, cette équation fera connaître sa vitesse angulaire; on en verra l'application dans le chapitre suivant.

Mouvement d'un mobile sur les côtés d'un polygone, et sur une ligne courbe.

281. Si un mobile, que nous pouvons considérer comme un point matériel pesant, descend dans la partie concave d'un polygone situé dans un plan vertical, en parcourant successivement les côtés de ce polygone, la vitesse du mobile éprouvera une perte en passant de l'un des côtés sur celui qui lui est adjacent.

Soient CD, DE, EF, etc. (*fig.* 154), les côtés du polygone; supposons que le mobile, après avoir parcouru le côté CD, ait acquis une vitesse capable de lui faire parcourir la distance D*e*, sur le prolongement de CD, dans l'unité de temps, par exemple, dans une seconde; décomposons la vi-

tesse De en deux autres : l'une dirigée suivant le côté DE, adjacent à CD, et l'autre Dd perpendiculaire à DE; cette dernière composante est détruite par la résistance du polygone, et la vitesse du mobile aura pour mesure la distance DE qui représente l'autre composante.

Du point D comme centre, et avec le rayon De, décrivons un arc de cercle qui coupera en I le prolongement de DE, la perte de vitesse sera représentée par la distance EI; cette vitesse perdue est la différence entre la vitesse du mobile au point D, suivant la direction CD prolongée, et la vitesse suivant la direction DE du côté suivant.

Désignons par v la vitesse uniforme De du mobile, et par α l'angle extérieur eDI; le triangle rectangle DEe donne, pour les valeurs des composantes,

$$Ee = Dd = v \sin \alpha, \quad DE = v \cos \alpha;$$

la première composante est nulle, parce qu'elle agit perpendiculairement à la direction du mobile; en retranchant la seconde composante de la vitesse v, la vitesse perdue sera exprimée par la différence

$$v - v \cos \alpha = v(1 - \cos \alpha).$$

Le mobile passant sur un troisième côté dont l'angle extérieur est α', le produit de la vitesse v' du mobile au point E par le facteur $1 - \cos \alpha'$ exprimera la perte de vitesse sur ce troisième côté, et ainsi de suite.

La perte de vitesse que le mobile éprouve en descendant successivement sur les côtés du polygone est d'autant plus petite que les angles extérieurs α, α', etc., sont plus petits; si tous ces angles étaient nuls, les côtés du polygone forme-

raient une ligne droite qui serait la section d'un plan incliné, et la vitesse du mobile, après être descendu le long de ce plan, serait égale à celle qu'il aurait acquise en descendant suivant une ligne verticale égale à sa hauteur.

Lorsque le polygone est composé d'un très grand nombre de côtés infiniment petits, son périmètre se confond avec une ligne courbe continue, les angles α, α', etc., compris entre deux tangentes consécutives, que l'on appelle angles de contingence, sont infiniment petits, et la perte de vitesse peut être considérée comme nulle; d'où l'on pourrait conclure, par analogie, qu'un mobile qui descend sur une ligne courbe tracée dans un plan vertical, acquiert une vitesse égale à celle qu'il aurait gagnée par une chute verticale de même hauteur que celle dont il est descendu. On démontre directement cette proposition par l'analyse, de la manière suivante.

282. Soit HMRS (*fig.* 155) la ligne courbe que doit décrire le mobile : cette ligne peut être considérée comme l'axe d'un canal courbe, et l'on peut supposer que le mobile est une sphère d'un diamètre un peu moindre que celui du canal dans lequel il peut se mouvoir, par l'action de la pesanteur, sans éprouver aucun obstacle par le frottement ni par la résistance de l'air; le mobile étant parti du point H, et ayant parcouru la distance HM suivant la courbe, il s'agit de trouver la loi de son mouvement.

La force accélératrice de la pesanteur, au point M, étant représentée par la partie $ML = g$ de la verticale MP, cette force peut être décomposée en deux autres, l'une $MN = KL = g \sin LMK$, dirigée suivant la normale (cette composante est détruite par la résistance de la courbe), et l'autre $MK = \varphi = g \cos LMK$, suivant la tangente, qui produit le mouvement varié du mobile.

Le triangle rectangle MKL donne $\cos LMK = \frac{MK}{ML}$.

Si l'on mène l'horizontale bm, qui coupe la verticale MP en p, et la courbe au point m, la partie Mp de la verticale et le petit arc Mm représenteront les accroissements infiniment petits, ou les différentielles dy, ds, de l'ordonnée $MP = y$ et de l'arc $HM = s$.

Les triangles rectangles MKL, Mpm, étant semblables, on a

$$ML : MK :: Mm : Mp :: ds : dy,$$

$$\frac{MK}{ML} = \frac{dy}{ds};$$

substituant ce dernier rapport à la place du cosinus, l'expression de la composante qui agit dans la direction de la tangente devient

$$\varphi = g\frac{dy}{ds}.$$

Si dans la formule générale du mouvement varié $\varphi = \frac{dv}{dt}$ (208), on met $g\frac{dy}{ds}$ à la place de φ, en observant que le cosinus doit être pris avec le signe —, parce que l'ordonnée y diminue à mesure que l'arc s augmente, on aura

$$\frac{dv}{dt} = -g\frac{dy}{ds}, \quad \frac{ds}{dt}dv = -gdy;$$

en substituant la valeur de $\frac{ds}{dt} = v$, cette équation devient

$$vdv = -gdy,$$

et en intégrant, on a

$$\tfrac{1}{2}v^2 = -gy + C.$$

Pour déterminer la constante C, on observera que puisque le mobile part du point H, sans vitesse initiale, $v = 0$ à ce point, et que l'ordonnée PM ou $y = AF = h$; en substituant ces valeurs, l'équation se réduit à

$$0 = -gh + C, \quad C = gh;$$

substituant cette valeur à la place de C, on aura

$$v^2 = 2g(h - y) = 2g \times BF, \quad v = \sqrt{2g.BF}.$$

Cette vitesse est la même que celle que le mobile aurait acquise en tombant de la hauteur verticale BF, et cette hauteur est égale à celle de l'arc HM sur lequel le mobile est descendu; par conséquent un mobile que la pesanteur fait descendre sur un arc de courbe est toujours animé de la même vitesse que celle qu'il aurait acquise par la chute verticale d'une hauteur égale à celle de cet arc.

Si au point R, le plus bas de la courbe, on mène une tangente horizontale qui coupe en Q l'axe AY des ordonnées, le mobile, après être descendu sur la branche HMR, aura acquis une vitesse exprimée par

$$\sqrt{2g.FQ};$$

cette vitesse poussera le mobile sur l'autre branche RS de la courbe, qui peut n'être pas semblable à la première, et il s'élèvera sur cette branche jusqu'au point S, à la même hauteur que celle dont il est descendu; alors sa vitesse sera épuisée, l'action de la pesanteur étant prépondérante, elle lui communiquera un mouvement contraire qui le fera descendre sur la branche SR et remonter sur la branche RMH; ce mouvement d'oscillation continuerait sans interruption s'il n'était pas ralenti successivement par le frottement et la résistance de l'air.

CHAPITRE XII.

FORMULES GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'OSCILLATION DES PENDULES.

La théorie du mouvement des pendules est l'une des branches les plus importantes des mouvements curvilignes variés; Galilée a eu la première idée de quelques-unes des propriétés du pendule, mais c'est à Huygens que l'on doit les belles et utiles découvertes de l'application du pendule aux horloges, et le théorème sur la relation qui existe entre la longueur du pendule et la pesanteur, de sorte que la première de ces quantités étant connue, on peut en déduire la seconde, comme nous le verrons plus loin.

283. Un pendule est formé d'un corps pesant fixé à l'un des bouts d'une tige; des couteaux, ou des ressorts très flexibles, sont ajustés à l'autre bout, pour suspendre le pendule à un axe horizontal autour duquel il peut librement osciller.

Quoique cet appareil soit peu compliqué, pour en déterminer les propriétés, on commence par établir celles du *pendule simple:* c'est un pendule idéal, formé d'un point matériel pesant, suspendu à un axe horizontal par un fil inextensible, assez délié pour qu'on puisse faire abstraction de sa masse et de son poids; on suppose qu'il n'y a point de frottement et que le mouvement a lieu dans le vide.

Représentons par CA (*fig.* 156) un pendule simple, suspendu au point C d'un axe horizontal, qu'on nomme axe de

rotation, dans une direction perpendiculaire à cet axe; le pendule étant abandonné à l'action de la pesanteur, le point matériel décrira un arc de cercle ABD, situé dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation, et la verticale abaissée du centre C coïncidera avec le rayon CB, mené au point B le plus bas de cet arc.

A l'origine du mouvement, nous supposerons que CA était la position du pendule, et qu'au bout du temps t il est parvenu en CM; menons AN, MP, perpendiculaires à la verticale CB, et faisons

$$CP = z, \qquad CN = c;$$

la gravité étant représentée par g, en désignant par v la vitesse du mobile au point M, en observant que cette vitesse est due à la hauteur d'où il est descendu, nous aurons

$$v = \sqrt{2g(z - c)};$$

si l'on fait l'arc $AM = s$, la vitesse sera égale au quotient de l'élément de l'arc par l'élément du temps, ce qui donnera

$$\sqrt{2g(z - c)} = \frac{ds}{dt}, \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(z-c)}}.$$

Faisons la longueur du pendule $CA = a$, l'angle $MCB = \theta$, la valeur initiale de cet angle, ou l'angle $ACB = \alpha$, nous aurons

$$S = a(\alpha - \theta), \qquad ds = -a\,d\theta;$$

les triangles rectangles CPM, CNA, donnent

$$z = a\cos\theta, \qquad c = a\cos\alpha;$$

en substituant ces valeurs dans celle de dt, on a

$$dt = \frac{-ad\theta}{\sqrt{2ga(\cos\theta - \cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{-d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}}.$$

Les formules pour le développement des cosinus donnent

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{2.3.4} - \text{etc.},$$
$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \text{etc.};$$

ces valeurs étant substituées dans la formule précédente, en observant que les angles étant très petits les quatrièmes puissances peuvent être négligées, il viendra

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{-d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}, \quad t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{-d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}};$$

l'intégrale

$$\int \frac{-d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} = \int \frac{-\frac{d\theta}{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2}}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{\theta}{\alpha}\right),$$

et par conséquent on a

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{arc}\left(\cos = \frac{\theta}{\alpha}\right);$$

il n'y a point de constante à ajouter, parce qu'on a $t = 0$ et $\theta = \alpha$, à l'origine du mouvement.

284. A mesure que le temps t augmente, l'angle θ diminue; lorsque le pendule coïncide avec la verticale CB, le facteur

$$\text{arc}\left(\cos = \frac{\theta}{\alpha}\right) = \text{arc}(\cos = 0) = \frac{1}{4}\,\text{circ.} = \frac{1}{2}\pi;$$

la valeur du temps t, employé par le pendule à descendre

au point le plus bas de l'arc qu'il décrit, a pour expression

$$t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Avec la vitesse que la pesanteur a communiquée au pendule en descendant, il passe de l'autre côté de la verticale; l'angle θ, qui était positif lorsque le pendule était à gauche de la verticale, devient négatif lorsqu'il est à droite: alors la pesanteur agit sur le pendule en sens contraire de son mouvement, qui est détruit lorsqu'il est parvenu au point D, situé à la même hauteur que le point A, d'où on l'avait fait partir: la direction du mouvement change, et le pendule descend du point D pour revenir au point A.

On voit que l'excursion du pendule, qu'on nomme *oscillation,* se compose de deux demi-oscillations, l'une descendante et l'autre ascendante; ces deux demi-oscillations sont égales entre elles, parce que la compensation est exacte pour la vitesse que le pendule gagne successivement dans sa demi-oscillation descendante et celle qu'il perd dans la demi-oscillation ascendante.

Cette égalité des oscillations du pendule se nomme *isochronisme;* on dit que les oscillations du pendule sont *isochrones,* lorsque ce pendule décrit des arcs infiniment petits.

Il faudrait, à un corps pesant, un temps $t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}$, pour tomber de la hauteur verticale du diamètre $2a$, ou pour parcourir la corde AB (197), et pour parcourir l'arc AMB, soutendu par la corde AB, le temps employé est $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Donc si deux corps abandonnés à l'action de la pesanteur, sans vitesse initiale, partent du point A pour aller au point B, l'un suivant la direction de l'arc AMB, et l'autre suivant

la corde AB, le premier arrivera au point B avant le second.

L'arc de cercle AMB est donc une ligne de plus courte descente, du point A au point B, que la ligne droite AB, quoique cette droite soit la plus courte distance entre ces deux points, et néanmoins la ligne courbe de plus vite descente n'est pas un arc de cercle.

Puisque la durée de la demi-oscillation descendante du pendule est égale à celle de la demi-oscillation ascendante, en appelant T le temps de l'oscillation entière, on aura

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}};$$

cette formule est indépendante de l'amplitude de l'arc, et par conséquent les oscillations du pendule seront isochrones dans les différents arcs qu'il décrira, pourvu que ces arcs soient très petits.

285. Ce n'est que par abstraction que l'on considère les arcs décrits par le pendule comme des arcs infiniment petits; quoique l'on cherche à se rapprocher de cette petitesse, l'étendue que l'on est obligé de donner aux arcs, afin de pouvoir compter les oscillations, exige une correction, pour les réduire à des arcs infiniment petits; nous allons reprendre la solution du problème, pour en déduire la série dont les premiers termes donnent la valeur approchée de cette correction.

Plaçons l'origine au point B, le plus bas de l'arc décrit par le pendule; prenons l'axe vertical BX pour l'axe des abscisses, et l'axe horizontal BY pour celui des ordonnées; par les points M et k, infiniment proches l'un de l'autre, menons la verticale Mh et l'horizontale kh, et conservons la notation des articles précédents.

Lorsque le pendule sera descendu de sa position initiale A au point M, sa vitesse acquise sera la vitesse due à la hauteur $NP = BN - BP = b - x$, ce qui est exprimé par l'équation

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(b-x)},$$

d'où l'on tire, en observant que ds et dt doivent être pris avec des signes contraires,

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}}.$$

Les deux triangles rectangles CPM, Mhk, qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables, ce qui donne

$$ds = \frac{adx}{y};$$

d'après la propriété du cercle, on a

$$y^2 = 2ax - x^2 = 2ax\left(1 - \frac{x}{2a}\right),$$

et la valeur de ds devient

$$ds = \frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{2x\left(1 - \frac{x}{2a}\right)}};$$

cette valeur de ds étant substituée dans celle de dt, on aura l'équation différentielle

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{-dx}{\sqrt{bx - x^2}}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

dont le second membre ne peut être intégré qu'en le réduisant en série.

En développant $\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binome, on a

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{x}{2a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{x^2}{4a^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^3}{8a^3}+\text{etc.};$$

la substitution de ce développement donne

$$dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\frac{-xdx}{\sqrt{bx-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4a^2}\frac{-x^2dx}{\sqrt{bx-x^2}}+\text{etc.}\right].$$

Pour obtenir la valeur de t, ou le temps d'une demi-oscillation, il faut intégrer chaque terme de cette série.

Si l'on différentie $x^{n-1}\sqrt{bx-x^2}$, on trouvera

$$d.x^{n-1}(bx-x^2)^{\frac{1}{2}}=(n-1)x^{n-2}dx\,(bx-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}x^{n-1}\,bdx-2xdx}{(bx-x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

réduisant au même dénominateur, et réunissant les termes semblables, cette différentielle devient

$$d.x^{n-1}(bx-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{(2n-1)\frac{1}{2}bx^{n-1}dx}{\sqrt{bx-x^2}}-\frac{nx^n dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

En transposant, divisant tous les termes par n et intégrant, on aura

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{bx-x^2}}=-\frac{x^{n-1}\sqrt{bx-x^2}}{n}+\frac{(2n-1)b}{2n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

Dans la série différentielle, l'intégrale doit être prise entre les limites $x=0$ et $x=b$; alors la dernière équation est réduite à

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{(2n-1)b}{2n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

On tire de cette équation, en prenant dx avec le signe moins,

et faisant successivement $n=1$, $n=2$, etc.,

$$n=1 \qquad \int\frac{-xdx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{1}{2}b\int\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}},$$

$$n=2 \qquad \int\frac{-x^2dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{3}{4}b\int\frac{-xdx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}b^2\int\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}};$$

etc., etc.

Substituant ces valeurs dans celle de dt, il viendra

$$dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2a}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\text{etc.}\right]\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}}.$$

En ajoutant $\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}b^2$ à la quantité qui est sous le signe radical de l'expression différentielle, on a

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{\frac{1}{4}b^2-(x-\frac{1}{2}b)^2}}=\int\frac{-\frac{dx}{\frac{1}{2}b}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b}\right)^2}}=\text{arc}\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right).$$

Lorsque le pendule se trouve dans la direction de la verticale, on a

$$x=0,\ \text{arc}\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right)=\text{arc}\,(\cos=-1)=\pi=3,14159\ldots,$$

et la durée, ou le temps de la demi-oscillation, est exprimé par la série

$$t=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2a}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\text{etc.}\right].$$

En ne prenant que le premier terme de cette série, on a l'expression de la valeur du temps t de la demi-oscillation du pendule, que nous avons déjà trouvée.

Si l'on fait $T'=2t$, et que l'on prenne seulement les deux

premiers termes de la série, on aura, pour l'expression de la durée de l'oscillation entière,

$$T' = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{b}{a}\right).$$

Le triangle rectangle CNA donne

$$a - b = a \cos \alpha, \quad \frac{b}{a} = 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Dans les petits arcs, le sinus de l'un de ces arcs diffère peu de la moitié du sinus de l'arc double; on a donc, à une très petite différence près,

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \tfrac{1}{2} \sin \alpha, \quad \frac{b}{a} = \tfrac{1}{2} \sin^2 \alpha;$$

cette valeur de $\frac{b}{a}$ étant substituée dans celle de T', on aura

$$T' = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{1}{16} \sin^2 \alpha\right),$$

ce qui fait voir que la grandeur de l'arc augmente la durée de l'oscillation, comme le carré du sinus de l'angle, ou de l'arc α, moitié de l'arc décrit par le pendule.

Le temps d'une oscillation infiniment petite est exprimé par la formule $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, et en comparant ce temps avec celui d'uue oscillation très petite, on a

$$T' = T\left(1 + \frac{1}{16} \sin^2 \alpha\right).$$

Soit n le nombre d'oscillations que fait un pendule dans l'arc 2α pendant le temps t, la durée de l'une de ces oscilla-

tions sera $\frac{t}{n} = T'$; appelons N le nombre d'oscillations infiniment petites que ferait ce pendule, dans le même temps $\frac{t}{N} = T$ sera la durée de chaque oscillation. Ces valeurs étant substituées à la place de T' et de T, la dernière formule devient

$$N = n\left(1 + \frac{1}{16}\sin^2\alpha\right).$$

Lorsqu'on aura déterminé n, cette formule fera connaître le nombre correspondant N d'oscillations infiniment petites.

Pendant l'observation, la grandeur des arcs diminue par l'effet de la résistance de l'air; le moyen le plus simple, pour corriger l'erreur qui résulterait de cette variation, consiste à prendre l'arc moyen $\frac{\alpha + \alpha_n}{2}$, ou la demi-somme des arcs extrêmes : en appelant α le premier arc et α_n le dernier, on a

$$N = n\left(1 + \frac{1}{16}\sin^2\frac{\alpha + \alpha_n}{2}\right);$$

cette formule servira pour réduire les oscillations observées en oscillations infiniment petites, lorsque l'observation aura été faite en peu de temps.

286. Si l'on veut une correction d'amplitude plus exacte que celle qu'on obtiendrait par la dernière formule, on pourra employer celle qui se déduit de l'analyse suivante.

Nous venons de trouver qu'une oscillation du pendule, dans le petit arc 2α, correspond à $1 + \frac{1}{16}\sin^2\alpha$ oscillations infiniment petites; dans chacune des oscillations suivantes, l'arc α diminue. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, la suite de ces arcs, nous aurons la suite d'oscillations infiniment petites

correspondantes

$$1+\frac{1}{16}\sin^2\alpha_1,\quad 1+\frac{1}{16}\sin^2\alpha_2,\ldots,\quad 1+\frac{1}{16}\sin^2\alpha_n,$$

et après n oscillations du pendule, le nombre correspondant d'oscillations infiniment petites sera exprimé par

$$n+\frac{1}{16}(\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2\ldots+\sin^2\alpha_n);$$

Pour transformer cette suite de sinus, et la sommer en termes finis, nous nous appuierons sur le théorème suivant, dont la vérité a été reconnue par l'expérience.

Un pendule étant mis en mouvement, en l'écartant d'environ deux degrés de la verticale, et l'abandonnant ensuite à l'action de la pesanteur, le nombre de ses oscillations croîtra en progression arithmétique, et les arcs correspondants α_1, α_2, α_3, etc., formeront une progression géométrique décroissante; ces arcs étant fort petits, on peut supposer qu'il en est de même pour leurs sinus.

Soit q un coefficient constant; on aura, d'après la loi que nous venons d'énoncer,

$$\sin\alpha_1=\frac{\sin\alpha}{q},\quad \sin\alpha_2=\frac{\sin\alpha}{q^2},\ldots,\quad \sin\alpha_n=\frac{\sin\alpha}{q^n};$$

$$n+\frac{\sin^2\alpha}{16}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\ldots\ldots+\frac{1}{q^n}\right);$$

en sommant la progression géométrique comprise entre les parenthèses, cette expression devient

$$n+\frac{\sin^2\alpha}{16}\cdot\frac{q^n-1}{(q-1)q^n}.$$

On éliminera q par le moyen de l'équation $\sin\alpha_n=\frac{\sin\alpha}{q^n}$, d'où

l'on tire

$$q^n = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}, \quad q = \sqrt[n]{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}};$$

en substituant ces valeurs de q et q^n, on trouve

$$n + \frac{\sin\alpha}{16} \cdot \frac{\sin\alpha - \sin\alpha_n}{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}. \qquad (a)$$

La racine $n^{ième}$ de $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}$ peut s'extraire par approximation ; on a d'abord, pour l'expression de cette racine en logarithmes ordinaires,

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{\mathrm{Log}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}}{n}};$$

développant la quantité exponentielle du second membre par le moyen de la série

$$a^x = 1 + \log a \,.\, x + \tfrac{1}{2}\log^2 a \,.\, x^2 + \text{etc.},$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \log 10 \frac{\mathrm{Log}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}}{n} + \tfrac{1}{2}\log^2 10 \frac{\mathrm{Log}^2\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}}{n} + \text{etc.}$$

En se bornant aux deux premiers termes, et observant que dans le système des logarithmes hyperboliques, ou népériens, $\log 10 = 2{,}302585\ldots\ldots = \mathrm{M}$, on a

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\mathrm{M}}{n}\,\mathrm{Log}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n},$$

et la formule (a) devient

$$n + \frac{n\sin\alpha\,(\sin\alpha - \sin\alpha_n)}{16\,\mathrm{M}\,\mathrm{Log}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}}.$$

L'arc α étant très petit, à la place de $\sin\alpha - \sin\alpha_n$ on peut écrire $\sin(\alpha - \alpha_n)$; on peut aussi remplacer le facteur $\sin\alpha$ par $\frac{1}{2}\sin(\alpha + \alpha_n)$: alors le nombre n d'oscillations très petites correspond à un nombre d'oscillations infiniment petites qui a pour expression

$$n\left[1 + \frac{\sin(\alpha + \alpha_n)\sin(\alpha - \alpha_n)}{32\,M\,\mathrm{Log}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_n}}\right], \quad \text{ou} \quad n\left[1 + \frac{\sin(\alpha + \alpha_n)\sin(\alpha - \alpha_n)}{32\,M\,\mathrm{Log}\frac{\alpha}{\alpha_n}}\right];$$

c'est la formule de Borda, dont M. Biot a donné la démonstration dans son *Traité d'Astronomie physique*.

PENDULE COMPOSÉ.

287. Le pendule simple est un pendule fictif; dans la réalité tout pendule a des dimensions finies, et alors on le nomme *pendule composé*: cherchons maintenant la formule qui exprime le mouvement d'oscillation de ce dernier pendule, dont la *fig.* 156 représente une section faite par un plan vertical perpendiculaire à l'axe de suspension, qui traverse ce plan au point C.

Les quantités dont nous avons fait usage pour le pendule simple auront la même notation dans le pendule composé; nous désignerons par a le rayon CA ou CM, du cercle que décrit le centre de gravité du pendule.

Appelons ω la vitesse angulaire du pendule, ou la vitesse des points situés à l'unité de distance de l'axe de suspension, au bout du temps t; la vitesse du centre de gravité sera $a\omega$, et celle d'un élément dm, situé à la distance r de l'axe de suspension, sera exprimée par $r\omega$.

La pesanteur g est la force accélératrice qui agit sur tous les points matériels, ou sur tous les éléments infiniment

petits dm du pendule; cette force est dirigée suivant la verticale MH: en la décomposant en deux autres, l'une suivant le rayon CM, et l'autre suivant l'élément du cercle, ou suivant sa tangente MT, la première composante ne produira aucun effet sur la vitesse du pendule, cette vitesse sera modifiée par la force accélératrice $g \cos \delta$, qui est l'expression de la seconde composante de la pesanteur.

La force accélératrice $g \cos \delta = \frac{dv}{dt}$, et par conséquent $g \cos \delta dt$, exprime l'accroissement de vitesse que cette force communiquerait à l'élément dm, pendant l'instant dt, si cet élément se détachait des autres éléments du pendule avec lesquels il est lié; au bout du temps $t + dt$, il aurait la vitesse $r\omega + g \cos \delta dt$, et la quantité de mouvement $(r\omega + g \cos \delta dt)\, dm$; mais, à cause de sa liaison avec les autres éléments du pendule, la vitesse et la quantité de mouvement de l'élément dm deviennent $r\omega + rd\omega$, $(r\omega + rd\omega)\, dm$, au bout du temps $t + dt$.

Le même raisonnement s'applique à tous les éléments du pendule, d'où il résulte qu'on a les deux intégrales

$$\int (r\omega + g \cos \delta dt)\, dm, \quad \int (r\omega + rd\omega)\, dm,$$

dont la première exprime la quantité de mouvement que la pesanteur a imprimée au pendule, et la seconde la quantité de mouvement qui lui reste; d'après le second énoncé du principe de d'Alembert (217), ces deux quantités de mouvement doivent se faire équilibre.

Pour que deux quantités de mouvement se fassent équilibre autour d'un axe, il faut que leurs moments, pris par rapport à cet axe, soient égaux entre eux; et pour former ces moments, il suffit de multiplier les quantités de mouvement

par la distance r de cet axe à l'élément dm, ce qui donnera l'équation

$$\int (r^2\omega + r^2 d\omega)\, dm = \int (r^2\omega + rg\cos\delta dt)\, dm;$$

en supprimant le facteur commun aux deux membres, et faisant sortir hors du signe $\int$ les facteurs qui sont les mêmes pour tous les éléments du pendule, on pourra donner à cette équation la forme suivante :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g\int r\cos\delta\, dm}{\int r^2 dm}.$$

Les angles HMT, CMP, qui ont pour complément le même angle TMP, sont égaux entre eux, et le triangle rectangle CPM donne $r\cos\delta = y$; en substituant cette valeur de $r\cos\delta$, la dernière formule devient

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g\int y\, dm}{\int r^2 dm}.$$

En appelant M la masse du pendule et $y_{\prime}$ la perpendiculaire menée de son centre de gravité sur la verticale CB, la valeur de l'intégrale $\int y\, dm = My_{\prime}$, et l'on aura

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gMy_{\prime}}{\int r^2 dm};$$

l'angle MCP $= \theta$, le triangle rectangle CPM donne $y_{\prime} = a\sin\theta$, et en mettant cette valeur dans la formule à la place de $y_{\prime}$, il vient

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gMa\sin\theta}{\int r^2 dm}.$$

La vitesse angulaire du pendule est exprimée par $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$;

en multipliant l'une par l'autre ces deux équations membre à membre, et intégrant, on aura

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{agM\cos\theta}{\int r^2 dm} + C.$$

Pour déterminer la valeur de la constante C, nous supposerons qu'à l'origine du temps, on avait $\omega = 0$, $\theta = \alpha$, ce qui donne

$$0 = \frac{agM\cos\alpha}{\int r^2 dm} + C, \quad C = -\frac{agM\cos\alpha}{\int r^2 dm};$$

en substituant cette valeur à la place de C dans l'intégrale, on a

$$\omega^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2agM}{\int r^2 dm}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Cette formule, qui résulte de considérations directes, d'après le principe de d'Alembert, est la même que celle que nous avons déjà trouvée (**280**), par le moyen du principe des forces vives; elle va nous servir pour trouver, d'une manière bien simple, la solution qui a occupé longtemps les plus célèbres géomètres.

288. Un pendule composé est, en général, un appareil formé de plusieurs corps pesants, liés entre eux par une verge ou un fil qui les traverse; ce fil est attaché à un axe horizontal autour duquel il peut osciller de part et d'autre de la verticale abaissée du point de suspension.

Dans le mouvement du pendule composé, le mouvement de chaque poids n'est pas le même que s'il formait un pendule isolé : en effet, la force de la gravité tend à faire descendre également tous ces poids dans le même temps; mais ils sont contraints, par la rigidité du fil qui passe par leurs

centres, à décrire des arcs dont les longueurs sont proportionnelles à leur distance du point de suspension, d'où il résulte qu'il doit se faire, entre ces poids, une compensation de mouvements, en sorte que ceux qui sont les plus proches du point de suspension accéléreront les vitesses des plus éloignés, et ceux-ci retarderont les vitesses des premiers. Il y a donc sur le fil par lequel tous les poids sont retenus, un point tel que si l'on y attache un poids, il oscillera comme un pendule simple, sans éprouver l'influence des autres parties du pendule composé : c'est la position de ce point qu'il s'agit de déterminer.

L'équation différentielle du pendule simple (283), étant élevée au carré, en faisant $a = l$, on a

$$dt^2 = \frac{l d\theta^2}{2g(\cos\theta - \cos\alpha)};$$

cette valeur de dt^2 étant substituée dans l'équation précédente, en supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$l = \frac{\int r^2 dm}{Ma};$$

ce qui fait voir que la distance l du point de suspension au point du pendule composé dont le mouvement n'est ni accéléré ni retardé par ses diverses parties, est égale au quotient de son moment d'iuertie, pris par rapport à l'axe de suspension, divisé par le produit de la masse du pendule par la distance du point de suspension à son centre de gravité.

On a nommé ce point le *centre d'oscillation* du pendule composé; sa position est la même que celle du centre de percussion (278), quoique les méthodes pour résoudre ces deux problèmes soient très différentes.

En appelant k^2 le rapport du moment d'inertie du pendule rapporté à un axe mené par son centre de gravité, parallèlement à l'axe de suspension, à la masse M du pendule, on a $\int r^2 dm = \mathrm{M}(a^2 + k^2)$ (276), et en substituant cette valeur, la dernière formule devient

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a} = a + \frac{k^2}{a}.$$

On dit que deux pendules sont *synchrones*, lorsqu'ils font des oscillations de même durée; ainsi la valeur de l, ou la distance du point de suspension au centre d'oscillation du pendule composé, exprime la longueur du pendule simple qui lui est synchrone; on voit que ce pendule simple est plus long de $\frac{k^2}{a}$ que la distance du point de suspension au centre de gravité du pendule composé.

289. Reprenons la formule

$$l = \frac{\int r^2 dm}{\mathrm{M}a}, \quad \int r^2 dm = \mathrm{M}al.$$

Lorsque le pendule est composé de plusieurs corps liés invariablement entre eux, par un fil qui passe par leurs centres de gravité, en appelant

M', M'', M''', etc., les masses de ces corps;

a', a'', a''', etc., les distances de l'axe de suspension à leurs centres de gravité;

l', l'', l''', etc., les distances du même axe à leurs centres d'oscillations, on aura

$\mathrm{M}'a'l'$, $\mathrm{M}''a''l''$, $\mathrm{M}'''a'''l'''$, etc., pour les moments d'inertie de ces corps, par rapport à l'axe de suspension.

D'ailleurs on a, par la propriété du centre de gravité (50),

$$Ma = M'a' + M''a'' + M'''a''' + \text{etc.},$$

et cette propriété a lieu également pour les moments d'inertie; d'où il résulte que la longueur l du pendule synchrone au pendule composé a pour expression

$$l = \frac{M'a'l' + M''a''l'' + M'''a'''l''' + \text{etc.}}{M'a' + M''a'' + M'''a''' + \text{etc.}}.$$

C'est par le moyen de cette formule qu'on calcule la distance du point de suspension d'un pendule composé à son centre d'oscillation, lorsqu'on a déterminé la distance du point de suspension aux centres de gravité et d'oscillation de chacune des parties dont ce pendule est formé.

CHAPITRE XIII.

DE LA MESURE DU PENDULE A SECONDES, ET DES MOYENS QU'IL FOURNIT POUR ÉCLAIRCIR DIVERS PHÉNOMÈNES DES SCIENCES PHYSIQUES.

290. Des expériences sur le pendule à secondes ont été faites par Picard, lorsqu'il s'occupait, en 1670, de la mesure d'un arc du méridien; on en trouve l'analyse dans le tome II de l'*Histoire de l'Astronomie moderne*, par Delambre; il en résulte qu'à Paris, la longueur du pendule qui bat les secondes est de 440^{ll},5.

Picard avait annoncé que la toise dont il s'est servi serait déposée à l'Observatoire, où il a demeuré depuis 1673 jusqu'à sa mort, arrivée dix ans plus tard; on ne l'a pas retrouvée, et la vérification de sa base, qui a été faite en 1739 par Cassini et Lacaille, a fait connaître que cette toise était plus petite d'un millième que celle dont on a fait usage depuis, et qui est connue sous le nom de toise du Pérou, ou de l'Académie. Les erreurs des observations astronomiques ayant compensé celles des mesures terrestres, le degré mesuré par Picard s'est trouvé d'une longueur à peu près exacte, mais celle du pendule est de 440^{ll},059, ou d'un millième moindre que celle qu'il a trouvée.

Il était important de déterminer cette longueur avec une grande exactitude; c'est l'objet que se proposa Mairan, et pour lequel il fit au Louvre, en 1735, les expériences qu'il a décrites dans un Mémoire imprimé dans le volume des

Mémoires de l'Académie des Sciences pour la même année; en combinant toutes ses expériences, il a trouvé $3^{pi}0^{po}8^{li}\frac{17}{30}$ ou $440^{li},566$, pour la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris. Godin, Bouguer et La Condamine furent chargés, en 1735, d'aller mesurer un arc du méridien au Pérou; ayant séjourné à Saint-Domingue, ils firent des expériences sur le pendule au petit Goave, dont la latitude est de 18°27′; suivant une lettre de Bouguer, insérée dans le volume ci-dessus, il a trouvé $36^{po}7^{li}\frac{1}{3}$ pour la longueur du pendule qui bat les secondes; celle que Godin a trouvée est plus longue seulement de $\frac{1}{24}$ de ligne. Bouguer dit qu'il est presque impossible, dans de pareilles expériences, de répondre d'un huitième ou d'un dixième de ligne; ces résultats sont d'une exactitude bien inférieure à ceux qu'on peut obtenir par les procédés et les calculs qu'on emploie maintenant.

291. Pour déterminer le rapport entre le pendule à secondes et les mesures de longueur, un appareil nouveau, et beaucoup plus parfait que tous ceux qu'on avait employés antérieurement, a été imaginé par Borda et construit sous sa direction; des expériences ont été faites à l'Observatoire avec cet appareil par Borda et Cassini, en 1792, depuis les premiers jours de juin jusqu'au 4 du mois d'août. Le Mémoire de Borda qui renferme les détails de ces expériences est inséré dans le troisième volume de la *Base du Système métrique décimal*.

Dans la pièce de l'Observatoire où ces expériences ont été faites, il y a un mur isolé, très solide, qui a été construit pour servir de support à un mural; on a placé sur ce mur, qui a 12 pieds de hauteur, un bloc de pierre qui le déborde

en avant; la partie saillante a été taillée dans la forme convenable pour y établir la suspension du pendule, par le moyen d'une plaque de cuivre IKL (*fig.* 157), sur laquelle on a ajusté un plan d'acier MN, dressé et poli avec beaucoup de soin; une ouverture rectangulaire ST est pratiquée dans ce plan et dans la plaque de cuivre, que l'on fixe sur le bloc de pierre par le moyen de trois vis, avec lesquelles on donne au plan MN une position exactement horizontale.

Le pendule (*fig.* 158) est composé de plusieurs parties, qui sont: le couteau d'acier AB, traversé perpendiculairement au milieu de sa longueur par la tige FD; la partie supérieure de cette tige est taillée en vis vers son extrémité, pour y adapter un petit écrou GH, qu'on peut approcher ou éloigner du couteau, ce qui permet de donner à la queue, ou à la partie inférieure de la tige, un mouvement d'oscillation à peu près synchrone à celui du pendule; cette queue est percée suivant son axe, d'un petit trou dans lequel on fait entrer le bout supérieur du fil, que l'on fixe avec une vis de pression; c'est avec un fil de fer que Borda a suspendu le poids du pendule à la queue qui traverse le couteau. Ce poids est une boule de platine dont le diamètre est de $16^{li}\frac{1}{6}$ (*fig.* 158^a); le fil entre dans la partie supérieure d'une petite calotte de cuivre où il est fixé, comme à son autre bout, par une vis de pression; le diamètre de la partie concave de cette calotte est égal à celui de la boule; la pression de l'air et une légère couche de suif entre les deux surfaces produit une adhérence qui suffit pour retenir le poids.

D'après la disposition qu'on a donnée au couteau et à la tige qui le traverse, en réglant ses oscillations de manière qu'elles soient synchrones à celles du pendule, la masse du

couteau et de la tige n'exerce aucune influence, ce qui permet de la considérer comme nulle, sans qu'il en résulte aucune erreur.

Une horloge à secondes était placée contre le mur, sous le bloc de pierre; le pendule, dont on comparait le mouvement à celui de cette horloge, était en avant, de sorte que la boule, qui était à peu près à la hauteur du centre de la lentille du pendule de l'horloge, en était éloignée d'environ 10 pouces.

Afin de garantir l'appareil du pendule des mouvements de l'air, on l'avait renfermé, ainsi que l'horloge, dans une caisse dont les panneaux inférieurs étaient vitrés.

Le pendule et l'horloge étant en repos, et le centre de la lentille étant marqué par l'intersection des deux diagonales d'un petit carré de papier, on avait placé, à 6 pieds de distance, une lunette fixe dans la direction de l'horizontale passant par le fil et le centre de la lentille, pour observer les coïncidences des oscillations, qui arrivaient toutes les fois que le fil du pendule et le centre de la lentille se trouvaient ensemble dans le plan vertical mené par l'axe de la lunette.

Un écran dont le bord vertical couvrait la moitié du fil était fixé en avant du pendule, afin de rendre plus facile l'observation des coïncidences; pour estimer l'amplitude des arcs à chaque concours, on avait placé, à une petite distance, une règle divisée en minutes de degré.

On avait fait des observations d'étoiles fixes, pour régler la marche de l'horloge: elle avançait de 13",4 sur les fixes; ainsi elle faisait 86413,4 oscillations dans un jour sidéral (**184**), et 86650 oscillations dans un jour solaire de temps moyen.

La longueur du pendule était de 12 pieds; il mettait à peu

près 2″ pour faire une oscillation; on allongeait ou l'on raccourcissait le fil pour lui donner une longueur telle que la durée d'une oscillation du pendule fût un peu moindre que celle de deux oscillations de la lentille de l'horloge.

Quoique le pendule fît, pendant plus de douze heures, des oscillations sensibles, on ne les observait que pendant quatre ou cinq heures, parce que dans les oscillations suivantes, les arcs décrits par le pendule devenant très petits, il eût été difficile de distinguer l'instant des coïncidences avec exactitude.

L'expérience étant achevée, il fallait mesurer la longueur du pendule: après l'avoir arrêté, on élevait, par le moyen d'une vis de rappel, le petit plan de cuivre IK, et on l'arrêtait avec une vis de pression, lorsqu'il était en contact avec la boule, sans la soulever; ensuite on déplaçait le pendule, en transportant le couteau OP (*fig.* 157), et le remplaçant par QR, formant la tête en T d'une règle de platine, qui était suspendue comme le pendule.

Cette règle de platine (*fig.* 159) avait été construite pour la mesure du pendule; sa longueur est d'un peu plus de 12 pieds, elle est couverte par une règle de cuivre dont l'extrémité supérieure est fixée par trois vis, un peu au-dessous du T qui sert à la suspendre; elle a 11 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur; son autre extrémité était libre, et la différence des dilatations du cuivre et du platine formait un thermomètre métallique. La partie inférieure de la règle avait une rainure dans laquelle glissait une languette de platine qu'on faisait mouvoir en poussant légèrement un bouton.

Le pendule étant remplacé par la règle, on faisait descendre la languette jusque sur le petit plan IK; la division de la languette marquait des 20 millièmes de 12 pieds, et le

vernier donnait les dixièmes de cette mesure; on avait, par le moyen du microscope, avec une grande précision, la longueur du pendule, depuis le point de suspension jusqu'au bas de la boule.

292. Nous allons maintenant rapporter la première expérience de Borda, avec les détails des corrections qu'il a faites aux résultats apparents pour en déduire la mesure du pendule à secondes.

Après avoir mis le pendule en mouvement, on observe les oscillations avec la lunette, lorsque le fil et le centre de la leutille sont près de s'éclipser simultanément derrière l'écran; si le fil passe à la verticale avant le centre de la lentille, on voit bientôt le centre de la lentille devancer le fil; il y a donc une coïncidence entre deux instants très rapprochés: on écrit le temps marqué par l'horloge immédiatement avant et après, et on estime l'instant probable où cette coïncidence a eu lieu.

On marque l'amplitude de l'arc que décrivait le pendule, la température indiquée par les thermomètres placés dans l'intérieur de la caisse qui renferme l'appareil, et la pression barométrique.

La lentille continue à devancer lè pendule: lorsqu'elle est près d'avoir gagné deux oscillations, on commence à observer la deuxième coïucidence pour laquelle on fait, ainsi que pour les suivantes, les mêmes observations que celles qui viennent d'être indiquées. Le tableau suivant renferme les résultats de ces observations, pour les cinq coïncidences, ou concours, qu'on a observées dans la première expérience.

NUMÉROS.	HEURES des concours.	AMPLITUDES des arcs.	THERMOMÈTRES inferieur.	THERMOMÈTRES supérieur.	THERMOMÈTRE métallique, 181,3 parties.	BAROMÈTRE, 28po 3/4.
1	$7^h 45' 56''$	64'	15°3	16°2		
2	8.59.10	32	15,4	16,9		
3	10.12.40	19	15,4	16,9		
4	11.26.29	11,5	15,4	16,8		
5	12.39. 3	7	15,6	17		

On remarque, dans ce tableau, que les temps et les amplitudes des arcs forment à peu près deux progressions: la première est une progression arithmétique croissante, et la seconde une progression géométrique décroissante.

Lorsqu'on a observé la première coïncidence, ou le premier concours, l'horloge marquait $7^h 45' 56''$; l'arc décrit par le pendule, de chaque côté de la verticale, était de 64', mais cet arc allait en décroissant, et à $8^h 59' 10''$ la lentille ayant gagné deux oscillations sur le pendule, on a observé le deuxième concours: le pendule ne décrivait plus qu'un arc de 32 minutes.

L'intervalle des deux concours a été de $73' 14'' = 4394''$; la lentille de l'horloge a fait, pendant ce temps, deux fois le nombre d'oscillations du pendule plus deux; donc le pendule a fait $\frac{4394 - 2}{2} = 2196$ oscillations.

Pendant le temps employé par la lentille à faire une oscillation, le pendule en fait les $\frac{2196}{4394}$; mais la lentille fait 86650 oscillations dans un jour solaire, temps moyen: donc, en continuant son mouvement avec la même vitesse, le pendule ferait, pendant ce même jour, $86650 \times \frac{2196}{4394} = 43305{,}28$ oscillations.

293. La correction qu'il faut faire à ces oscillations, pour les réduire en oscillations infiniment petites, est exprimée par la formule (286)

$$43305,28 + \frac{43305,28 . \sin(\alpha + \alpha_n) \sin(\alpha - \alpha_n)}{32 M \log \frac{\alpha}{\alpha_n}},$$

dans laquelle $\alpha = 64'$, $\alpha_n = 32'$, $M = 2,302585$. En mettant ces nombres à la place des lettres, et employant les Tables de logarithmes, on trouve

log 43305,28........	4.6365408
log sin 1°36'........	$\bar{2}$.4459409
log sin 0°32'........	$\bar{3}$.9688698
c. log 32..............	8.4948500
c. log 2,302585........	9.6377844
c. log 2...............	10.5213902
log 0,50743.........	29.7053761

c'est à peu près 0,51; ajoutant cette correction au premier terme de la formule, on aura. . . . . . 43305,79.

En faisant les mêmes calculs pour chacun des trois autres intervalles, on trouvera :

$$\begin{aligned} 43305,35 + 0,14 &= 43305,49 \\ 43305,44 + 0,05 &= 43305,49 \\ 43305,14 + 0,02 &= \underline{43305,16} \\ & 173221,93 \end{aligned}$$

ce qui donne, pour la moyenne. . . . . 43305,48 oscillations infiniment petites.

La longueur du pendule, mesurée avec la règle comme nous l'avons expliqué, depuis le point de suspension jusqu'au plan qui touche le bas de la boule, a été trouvée de 203952,2 parties; il faut y ajouter 0,3 pour l'allongement

de la règle suspendue par son extrémité supérieure, et l'on a 203952,5. Cette longueur doit être corrigée des effets produits par la dilatation et les changements de température.

Un fil de fer s'allonge de $\frac{1}{70000}$ pour 1° du thermomètre de Réaumur, et par conséquent de $\frac{1}{87500}$ pour 1° du thermomètre centigrade, ce qui produirait 2,33 parties sur la longueur du pendule.

Les thermomètres ont marqué, terme moyen pris entre toutes les observations, 16°,12; ils marquaient 16°,30 lorsqu'on a mesuré le pendule; la différence est 0,18: d'où il résulte un allongement de $2,33 \times 0,18 = 0,42$. Cette correction étant retranchée de la longueur ci-dessus, il reste 203952,08: il en faut encore ôter le rayon de la boule; son diamètre, mesuré avec la languette de la règle, a été trouvé de 1874 parties, dont la moitié 937, ou son rayon, étant retranché, on aura, pour la longueur du pendule, depuis le point de suspension jusqu'au centre de la boule, 203015,08 parties.

294. Il faut maintenant chercher la distance du point de suspension au centre d'oscillation du pendule; la règle générale pour calculer cette distance est exprimée par la formule (**289**)

$$l = \frac{M'a'l' + M''a''l'' + M'''a'''l'''}{M'a' + M''a'' + M'''a'''}.$$

Pour appliquer cette formule au pendule de Borda, nous observerons d'abord que les masses M', M'', M''', de la boule, de la calotte et du fil, peuvent être remplacées par les poids; en désignant par A, B, C, ces poids, mettant a, b, c à la place de a', a'', a''', qui représentent les distances du point de suspension aux centres de gravité de ces trois parties, et désignant par r le rayon de la boule, on a $l' = a + \frac{2r^2}{5a}$, dis-

tance du point de suspension au centre d'oscillation de la boule. Pour la calotte, son centre de gravité et son centre d'oscillation, qui coïncident à peu près l'un avec l'autre, sont sur la surface de la boule, ce qui donne $l'' = b = a - r$; et la longueur du fil étant désignée par h, on a $l''' = c + \frac{h^2}{12c}$, pour la distance de son centre d'oscillation au point de suspension. En substituant ces valeurs dans la formule générale, elle devient

$$l = \frac{Aa\left(a + \frac{2r^2}{5a}\right) + B(a-r)^2 + Cc\left(c + \frac{h^2}{12c}\right)}{Aa + B(a-r) + Cc};$$

divisant le numérateur par le dénominateur, et réduisant le premier terme du reste, on aura

$$l = a + \frac{2r^2}{5a} - \frac{B\left(ar - \frac{3}{5}r^2 - \frac{2r^3}{5a}\right) + Cc\left[a + \frac{2r^2}{5a} - \left(c + \frac{h^2}{12c}\right)\right]}{Aa + B(a-r) + Cc}.$$

Les lettres de cette formule représentent les nombres suivants, donnés par l'expérience :

$A = 9911$ grains, poids de la boule;
$B = 37{,}82$ gr., poids de la calotte;
$C = 13{,}79$ gr., poids du fil;
$a = 203015{,}08$ parties

-2905 { 1968 parties, distance depuis le point de suspension jusqu'au commencement du fil,
$r = 937$ parties }

$h = 200110{,}08$ parties, longueur du fil,
$100055{,}04$
$+ \quad 1968$

$c = 102023{,}04$ parties, distance du point de suspension au centre de gravité du fil.

Les lettres étant remplacées par ces valeurs, on aura

$$l = 203015{,}08 + 1{,}73 - \frac{10325545417 2{,}27}{202113 1948{,}58};$$

le second terme est la distance du centre de la boule à son centre d'oscillation, et le troisième terme, qui vaut 51,08 parties, exprime la correction relative au poids de la calotte et à celui du fil. Si l'on négligeait le poids de la calotte, la correction pour le poids du fil serait de 47,71 parties.

Il résulte de toutes ces corrections, que le pendule simple synchrone au pendule observé $l = 202965{,}73$ parties.

295. Nous allons appliquer ces résultats obtenus par l'expérience, pour déterminer la longueur du pendule à secondes.

La durée d'une oscillation du pendule simple est exprimée par la formule (**284**)

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}};$$

en mettant l à la place de a, et désignant par n le nombre d'oscillations du pendule, pendant le temps t, on a $T = \frac{t}{n}$, et la formule précédente devient

$$\frac{t}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Soit L la longueur d'un autre pendule, qui fait N oscillations pendant le temps T; on aura pareillement, pour l'expression de l'une des oscillations de ce pendule,

$$\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Ces deux dernières formules donnent la proportion suivante :

$$\frac{t}{n} : \frac{T}{N} :: \sqrt{l} : \sqrt{L};$$

c'est-à-dire que les durées des oscillations des deux pendules sont proportionnelles aux racines carrées de leurs longueurs.

Si la durée de l'oscillation $\frac{T}{N} = 1''$, la longueur du second pendule, ou du pendule à secondes, aura pour expression

$$L = \frac{ln^2}{t^2};$$

en faisant $l = 202965,73$, $n = 43305,48$, $t = 86400$, et calculant par logarithmes, on trouvera

log l........	5.3074227
2 log n........	9.2730856
c. 2 log t........	0.1269726
log L........	14.7074809

Longueur du pendule à secondes, dans l'air,

$$L = 50989,52 \text{ parties.}$$

Il faut maintenant faire les corrections relatives à la résistance de l'air, pour trouver quelle serait la longueur du pendule, s'il oscillait dans le vide.

Le poids d'un corps est moindre dans l'air que dans le vide; la différence est égale au poids du volume d'air dont il occupe la place; c'est un fait qui a lieu dans tous les fluides, et que l'expérience rend sensible : on en verra la démonstration dans l'hydrostatique.

En appelant P le poids d'un corps dans l'air, P′ son poids dans le vide, et p le poids d'un volume d'air égal à celui du corps, on a, d'après la proposition qui vient d'être énoncée,

$$P = P' - p$$

Soient m la masse du corps, ρ le rapport de la densité de l'air à celle du corps; g et g' les intensités de la gravité dans l'air et dans le vide, on aura

$$P = mg, \quad P' = mg', \quad p = P'\rho = mg'\rho;$$

ces valeurs étant substituées dans la première équation, il viendra

$$mg = mg' - mg'\rho, \quad g' = \frac{g}{1-\rho} = g + g\rho + g\rho^2 + \text{etc.}$$

Soient l, l', les longueurs de deux pendules synchrones, soumis aux gravités g, g', on aura

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l'}{g'}};$$

cette équation étant combinée avec la précédente, on en tire

$$l' = \frac{l}{1-\rho} = l + l\rho + l\rho^2 + \text{etc.};$$

en se bornant à la première puissance de ρ, qui est une fraction très petite, le second terme de cette série sera la correction qui doit être ajoutée au pendule dans l'air, pour avoir la longueur du pendule synchrone dans le vide.

Suivant les expériences de Deluc, le baromètre étant à

28 pouces, et le thermomètre de Réaumur à $16^{\circ}\frac{3}{4}$, une ligne de mercure répond à 77,55 pieds d'air; c'est-à-dire que la pesanteur spécifique de l'air est à celle du mercure comme. . . . . 1 : 11167,2;

la pesanteur spécifique du mercure est à celle de l'eau, suivant Brisson, comme. 13,57 : 1,

et d'après les expériences de Borda, la pesanteur spécifique de l'eau est à celle de la boule de platine comme. . . . . . . 1 : 20,71.

En multipliant ces rapports, et divisant ensuite par l'antécédent, on trouve que la pesanteur spécifique de l'air est à celle de la boule de platine comme 1 : 17043.

D'après la valeur de $l = 50989{,}52$, et celle de $\rho = \frac{1}{17043}$ que nous venons de trouver, on aura la correction suivante, pour former avec le pendule dans l'air le pendule qui lui est synchrone dans le vide :

$50989{,}52 \times \frac{1}{17043} = \ldots\ldots$ 2,99 parties;

plus, pour le poids du fil et de la calotte. 0,02

Pour chaque ligne de mercure du baromètre, cette correction augmente de $\frac{1}{28 \times 12} = \frac{1}{336}$; et suivant Lavoisier, un volume d'air se dilate de $\frac{1}{215}$ pour un degré du thermomètre de Réaumur, ou à peu près de $\frac{1}{270}$ pour un degré centigrade, ce qui donne :

$3{,}01\left(\frac{2{,}8}{336} + \frac{5}{270}\right) = 3{,}01 \times \frac{29}{1080} = \ldots$ 0,08

3,09

ajoutant cette correction à la longueur du pendule dans l'air, qui est de. 50989,52
on a, pour la longueur du pendule à secondes, dans le vide. . . . . 50992,6 parties.

Le thermomètre métallique marquait 151 parties au terme de la glace fondante; et 181,5 pendant l'expérience: la différence est de 30,5; pour une partie du thermomètre, la règle s'allonge de $\frac{1}{216000}$, ce qui donne, pour la dernière correction,

$$50992,6 \times \frac{30,5}{216000} = \ldots\ldots \qquad 7,2$$

Longueur du pendule à secondes dans le vide, à la température de la glace fondante. . . . . 50999,8 parties.

On voit, dans le tableau qui renferme les résultats des vingt expériences qui ont été faites et calculées par Borda, que toutes les différences sont très petites: la plus grande n'est pas de 0,5 ou $\frac{1}{2}$ partie; la moyenne est de 50999,6 parties.

296. Les rapports suivants, qui ont été déterminés par des expériences très précises, vont nous servir pour réduire en mesures usuelles la longueur du pendule à secondes exprimée en parties de la règle de platine.

Quatre règles de platine avaient été construites par Lenoir, sous la direction de Borda, et c'est à celle de ces règles numérotée 1 que les trois autres ont été rapportées, à la température de la glace fondante; on a trouvé que 204000 parties

de la règle du pendule répondaient à 203995,1 parties de la règle n° 1, d'où il résulte que la longueur du pendule

$$l = \frac{50999,6 \times 203995,1}{204000} = 50998,38 \text{ parties de la règle n° 1};$$

en divisant par 200000, nombre de parties contenues dans la règle, on aura

$$l = 0,2549919 \text{ de la règle n° 1}.$$

Suivant les expériences de Borda, la règle n° 1, prise à la température de la glace fondante, est à la toise du Pérou, à 13° de Réaumur, comme 200000 est à 100015,15, et par conséquent si l'on désigne la toise par t, elle aura pour expression

$$t = \frac{100015,15}{200000} = 0,50007575.$$

Ces deux dernières expressions donnent, pour la longueur du pendule qui bat les secondes dans le vide, à l'Observatoire,

$$l = \frac{0,2549919t}{0,50007575};$$

la toise étant remplacée par sa valeur $t = 864$ lignes, on trouvera

$$l = 440^{\text{li}},5593;$$

en divisant par 443,296, on a la longueur du pendule en mètre

$$l = 0^{\text{m}},9938265.$$

Pour réduire cette longueur du pendule à ce qu'elle serait si du point où il a été observé on le transportait, sur la même verticale, au niveau de la mer, désignons par g, G, les intensités de la pesanteur à ces deux points; appelons H

la hauteur du lieu de l'observation et R le rayon de la Terre, nous aurons

$$G = \frac{g(R+H)^2}{R^2} = g\left(1 + \frac{2H}{R}\right),$$

en développant le carré, et négligeant le dernier terme.

On peut remplacer G et g par les longueurs L et l des pendules correspondants, qui ont le même rapport, et par cette substitution la formule devient

$$L = l\left(1 + \frac{2H}{R}\right).$$

La hauteur de l'Observatoire au-dessus du niveau de la mer $H = 63$ mètres; en prenant pour le rayon de ce point de la Terre le rayon du parallèle moyen, on a $R = 6366679$ mètres; avec ces valeurs la correction $\frac{2H}{R} = 0,0000197$, d'où il résulte qu'on aura

$$L = 0^m,9938462,$$

pour la longueur du pendule à secondes dans le vide, et au niveau de la mer.

297. Les oscillations infiniment petites de deux pendules sont entre elles comme les racines carrées de leurs longueurs; en désignant par N, N', les nombres d'oscillations qu'ils font pendant les temps T et T', on a

$$\frac{T}{N} : \frac{T'}{N'} :: \sqrt{L} : \sqrt{L'};$$

lorsque $T = T'$, les carrés des termes de cette proportion donnent

$$L' = \frac{N^2 L}{N'^2}.$$

Appliquons cette formule pour calculer la longueur du pendule décimal, qui fait $N' = 100000$ oscillations dans un jour solaire de temps moyen.

Nous connaissons la longueur $L = 0^{m},9938462$ du pendule sexagésimal qui fait $N = 86400$ oscillations dans un jour moyen : avec ces valeurs, le calcul logarithmique donnera

log L............	$\bar{1}.9973192$
2 log N............	9 8730274
c. 2 log N'............	0.0000000
log L'............	9.8703466

$L' = 0^{m},7419020$;

on a trouvé, par les expériences de 1808... $L' = 0\ ,7419175$

différence....... $0\ ,0000155$

Ces dernières expériences ont été faites à l'Observatoire par MM. Biot, Bouvard et Mathieu; l'appareil de leur pendule était semblable à celui de Borda, mais il n'avait guère que 28 pouces, ou $0^{m},76$; on l'avait réduit à cette longueur, pour le rendre portatif dans les diverses stations où il a été employé, et, au lieu d'un fil de fer, on a préféré un fil de cuivre, pour éviter les erreurs qui pourraient être occasionnées par le magnétisme terrestre. La différence entre la longueur du pendule décimal qu'ils ont trouvée et celle qui résulte des expériences de Borda est de $\frac{155}{10000}$ de millimètre, ou à peu près $\frac{7}{1000}$ de ligne; des résultats qui diffèrent d'une aussi petite quantité attestent la perfection des instruments dont on s'est servi pour les obtenir, et la dextérité avec laquelle les expériences ont été faites.

Les sciences physiques n'offrent point de modèles plus parfaits de l'art des expériences que celui dont Borda les a en-

richies par cette mesure du pendule; le dernier résultat que nous venons de déduire de toutes ses expériences va d'abord nous servir pour calculer la valeur de la gravité représentée par la lettre g, ou la vitesse produite par cette force dans la chute verticale des corps. On a vu (220) comment cette vitesse acquise peut être rendue sensible par le moyen de la machine d'Atwood; lorsqu'on se contente des principaux phénomènes, cette machine ingénieuse les reproduit d'une manière très satisfaisante, mais on ne peut pas en obtenir la valeur avec une précision comparable avec celle que donne le pendule.

298. Reprenons la formule

$$\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}};$$

lorsque $T = 1''$, $N = 1$ oscillation; on a d'ailleurs $\pi = 3{,}1415926$, et nous venons de trouver $L = 0^m{,}9938462$; en substituant ces valeurs dans la formule, et élevant chaque membre au carré, on en tire

$$g = 9^m{,}8089;$$

telle est la vitesse d'un corps, lorsqu'il est tombé verticalement pendant une seconde sexagésimale de temps moyen, dans le vide, au niveau de la mer, dans un lieu de la Terre situé sur le parallèle de $48°50'14''$, latitude de l'Observatoire de Paris.

Tous les corps semblables et de même volume, par exemple, des boules de même diamètre, suspendues à des fils de même longueur, de quelque nature qu'ils soient, les plus denses comme les plus légers, font, dans un même lieu de la Terre, des oscillations égales dans des temps égaux;

c'est ce qui a été vérifié par des expériences faites avec beaucoup d'exactitude: il en résulte que dans leurs chutes verticales, ces corps parcourent, dans le vide, des espaces égaux pendant des temps égaux.

Depuis son origine, l'Académie des Sciences a considéré la mesure de la Terre comme l'une des principales opérations dont elle devait s'occuper, et la mesure du pendule est liée à celle de la Terre, parce qu'elle sert à déterminer sa forme.

Picard, à qui l'on doit la première mesure d'un degré du méridien terrestre, avait aussi mesuré la longueur du pendule à secondes; mais les moyens qu'on employait à cette époque ne permettaient pas de distinguer l'inégalité des quantités aussi petites que celles qu'il faut apprécier dans ces expériences, puisque celles qu'il fit à Uranibourg lui donnèrent la même longueur que celle qu'il avait trouvée à Paris; il avait aussi trouvé la même longueur à Montpellier et dans divers autres lieux de la France. D'après ces expériences, les variations de la longueur du pendule qui bat les secondes à des latitudes différentes étaient incertaines; on présumait même que ces variations étaient nulles.

Pour éclaircir ce qui paraissait douteux dans cette question, il fallait faire des expériences sur un parallèle très éloigné de celui de Paris. En 1671, l'Académie des Sciences proposa d'envoyer un astronome à Cayenne, dont la latitude est de 4°56'; Richer fut chargé de cette mission, qui avait pour objet de vérifier l'obliquité de l'écliptique et plusieurs autres points fondamentaux de l'Astronomie; l'observation qui a rendu ce voyage mémorable est celle de la longueur du pendule. Richer ne donne aucun détail de ses expériences, il dit seulement qu'elles ont été faites pendant dix

mois, et répétées plusieurs fois chaque semaine. La longueur du pendule qui bat les secondes à Cayenne ayant été marquée sur une règle de fer, pour la rapporter en France, en la comparant à celle de Paris qui est, suivant Richer, de $3^{pi}8^{li}\frac{3}{5}$, la différence a été trouvée d'une ligne un quart, dont celle de Cayenne est moindre que celle de Paris.

Ce résultat est la première donnée qu'on ait eue sur les variations du pendule à secondes à des latitudes différentes.

299. Il résulte de la théorie de l'attraction, qu'en allant de l'équateur au pôle, la longueur du pendule à secondes augmente proportionnellement au carré du sinus de la latitude : d'après ce principe, pour une latitude quelconque H, la longueur L du pendule à secondes aura pour expression

$$L = A + B\sin^2 H;$$

le second membre renferme la longueur A du pendule qui bat les secondes à l'équateur, et l'excès B de ce pendule sur celui du pôle. Pour déterminer ces deux constantes, il suffit de connaître les longueurs L', L'' des pendules qui battent les secondes, au niveau de la mer, en des lieux dont les latitudes H', H'' sont connues; alors on aura

$$L' = A + B\sin^2 H', \quad L'' = A + B\sin^2 H'';$$

la première équation étant retranchée de la seconde, leur différence donne

$$B = \frac{L'' - L'}{\sin^2 H'' - \sin^2 H'}.$$

En multipliant l'une par l'autre les formules connues $\sin(H'' + H')$, $\sin(H'' - H')$, remplaçant $\cos^2 H'$ par sa va-

leur $1 - \sin^2 H'$, et observant que $\sin^2 H'' + \cos^2 H'' = 1$, on trouve

$$\sin(H'' + H')\sin(H'' - H') = \sin^2 H'' - \sin^2 H',$$

et la formule précédente devient

$$B = \frac{L'' - L'}{\sin(H'' + H')\sin(H'' - H')}.$$

Prenons pour l'un des lieux, ou l'une des stations, l'Observatoire de Paris; sa latitude $H' = 48°50'14''$, et, d'après les expériences de Borda, $L' = 0^m,9938462$.

M. Biot a trouvé que la longueur du pendule décimal à secondes est de $0^m,7427231$ à Unst, la plus boréale des îles Shetland, dont la latitude $H'' = 60°45'25''$; ce pendule étant multiplié par $\left(\frac{1000}{864}\right)^2$, le produit sera le pendule sexagésimal à secondes $L'' = 0^m,9949459$; ces nombres étant substitués à la place des lettres, en observant que la somme des latitudes $H'' + H' = 109°35'39''$, qui répond à $\sin(90° - 19°35'39'')$ ou $\sin 70°24'21''$, on aura

$$B = \frac{0,0010997}{\sin 70°24'21'' \sin 11°55'11''};$$

en calculant par les Tables de logarithmes, on trouvera

log 0,0010997	$\bar{3}.0412742$
c. log sin 70° 24′ 21″	0.0259069
c. log sin 11° 55′ 11″	0.6849938
log B	$\bar{3}.7521749$

$$B = 0,0056516.$$

L'équation pour la latitude de Paris donne

$$A = L' - B \sin^2 H';$$

et en remplaçant les lettres du second membre par leurs valeurs,

$$A = 0,9938462 - 0,0056516 \sin^2 48°50'14'';$$

log 0,0056516	$\bar{3}.7521749$
2 log sin 48°50'14''	$\bar{1}.7534084$
log 0,0032039	$\bar{3}.5055833$

$$A = 0,9938462 - 0,0032039 = 0,9906423.$$

On trouvera, par des calculs semblables à ceux que nous venons de faire, la même valeur de la longueur A du pendule équatorial, en substituant les valeurs des lettres L'', B et H'', dans l'équation relative aux expériences faites à la station de Unst.

300. Pour vérifier les valeurs des constantes A et B, que nous venons de déterminer, nous emprunterons le théorème suivant à la théorie de l'attraction.

L'aplatissement, ou l'ellipticité du sphéroïde terrestre, est égal à cinq demies du rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, moins l'excès de la longueur du pendule à secondes sous l'équateur sur celle du pendule au pôle, divisé par le premier de ces pendules.

Désignons l'aplatissement par α; le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, sous l'équateur, est exprimé par la fraction $\frac{1}{289}$ (265), et par conséquent on aura, d'après le théorème que nous venons d'énoncer,

$$\alpha = \frac{5}{2} \times \frac{1}{289} - \frac{B}{A} = 0,00865 - \frac{B}{A}.$$

En mettant les valeurs des constantes A et B dans cette for-

mule, on trouve

$$\alpha = 0{,}002957 = \frac{1}{338}.$$

Cet aplatissement est un peu moindre que celui de $\frac{1}{334}$, adopté par la Commission qui a fixé les unités de mesures et de poids du système métrique décimal; suivant Delambre, on a de fortes raisons pour croire que l'aplatissement est au moins $\frac{1}{310}$.

La nutation et la précession, ou la théorie des inégalités du mouvement de la lune, les mesures effectuées pour déterminer la grandeur du méridien terrestre, et les expériences sur la mesure du pendule à secondes, indiquent un aplatissement compris entre des limites peu étendues : d'après les recherches analytiques de Laplace, celui qui satisfait le mieux à ces trois phénomènes est de 0,00326, ou $\frac{1}{306,75}$; nous allons chercher les valeurs des constantes A et B, par le moyen de cet aplatissement.

Cette valeur de l'aplatissement étant substituée à la place de α, dans l'expression du théorème précédent, on aura

$$0{,}00865 - \frac{B}{B} = 0{,}00326,$$

d'où l'on tire

$$B = 0{,}00539\,A,$$

et l'équation générale devient

$$L = (1 + 0{,}00539 \sin^2 H)\,A;$$

pour la latitude de l'Observatoire, on a $L = 0{,}9938462$, et $H = 48°50'14''$; en substituant ces nombres à la place des

lettres, on trouvera, pour les valeurs des constantes,

$$A = \frac{0,9938462}{1 + 0,00539 \sin^2 48^\circ 50' 14''} = 0,9908193,$$
$$B = 0,00539 \times 0,9908193 = 0,0053405;$$

d'où il résulte qu'à une latitude quelconque H, on a

$$L = 0,9908193 + 0,0053405 \sin^2 H,$$

pour l'expression de la longueur du pendule à secondes.

Appliquons cette formule pour calculer la longueur du pendule qui bat les secondes à Londres. Soit $H = 51^\circ 31' 8''$ la latitude du lieu où ce pendule oscille; en calculant le dernier terme par logarithmes, on trouvera

2 log sin 51°31′8″........	$\bar{1}.7873164$,
log 0,0053405.........	$\bar{3}.7275819$
	$\bar{3}.5148983$

Ce logarithme répond à.	0,0032726
Ajoutant le premier terme. . . .	0,9908193
on aura.	L = 0,9940919

pour la longueur du pendule demandé.

D'après les expériences faites à Londres par le capitaine Kater, dans la maison de M. Browne, à Portland-Place, dont la latitude est de 51°31′8″, il a trouvé 39,13908 pouces anglais pour la longueur du pendule qui bat les secondes à cette station, et 39,13929 au niveau de la mer. En réduisant ce dernier nombre en mètre, dont la valeur en pouces an-

glais est de 39,37079, on aura

$$L = \frac{39,13929}{39,37079} = 0^m,99412;$$

la différence entre cette longueur du pendule à secondes, et celle que nous avons trouvée par le calcul, n'est pas de $\frac{3}{100}$ de millimètre, elle est presque dix fois moindre que celle dont Bouguer croyait qu'on ne pouvait guère répondre dans de semblables expériences.

301. Une partie des procédés de Borda a été employée par le capitaine Kater, suivant son Mémoire inséré dans les *Transactions philosophiques* de l'année 1819, mais il s'est affranchi de tous les calculs relatifs à la forme du pendule, par la disposition de celui dont il a fait usage.

Ce pendule est composé d'une barre de cuivre AB (*fig.* 160) dont la largeur est de $1\frac{1}{2}$ pouce anglais (38 millimètres) et l'épaisseur $\frac{1}{8}$ de pouce (3 millimètres); les allonges AH et BI, fixées à ses deux bouts, n'ont que la moitié de sa largeur, pour faciliter l'observation des coïncidences du pendule avec le centre de la lentille d'une horloge à secondes.

Deux couteaux de suspension en acier C et O sont ajustés vers les extrémités de la barre de cuivre; cette barre traverse un poids cylindrique D, formant une espèce de lentille, fixée près du couteau O; deux autres poids E et F sont placés entre les couteaux: le premier de ces poids est fixe, le second peut glisser le long de la barre; le poids du pendule entier est d'environ 14 kilogrammes.

Un support en fonte de fer est solidement fixé contre un mur, à une hauteur convenable au-dessus d'une horloge à se-

condes; ce support a deux branches, taillées avec des rainures qui contiennent des coussinets d'acier poli, sur lesquels on pose l'un des couteaux.

Tout l'appareil doit être disposé de manière que les tranchants du couteau de suspension soient dans une même ligne droite horizontale, et que le plan vertical mené perpendiculairement à cette ligne, par le centre de la lentille de l'horloge, coupe le pendule, suivant sa longueur, en deux parties égales.

Après avoir fait osciller le pendule autour du couteau C, dont le tranchant forme l'axe de suspension, on le renverse, et on le suspend à l'autre couteau O; ensuite, par le moyen du poids F, que l'on peut faire glisser sur la barre, ce qui déplace le centre de gravité du pendule, on cherche la position où ce poids doit être fixé pour que dans les deux suspensions inverses du pendule ses oscillations soient de même durée; alors la distance des tranchants des deux couteaux, ou des deux axes, est la longueur du pendule simple synchrone au pendule composé.

302. Ce procédé, imaginé par le capitaine Kater, est fondé sur une propriété du centre d'oscillation découverte par Huygens; on énonce cette propriété en disant que les centres de suspension et d'oscillation sont réciproques l'un de l'autre : c'est-à-dire que si l'on met l'axe d'oscillation à la place de l'axe de suspension, le pendule simple synchrone au pendule composé aura la même longueur que celle qu'il avait dans la première position des axes.

Soit G le centre de gravité du pendule, qui est situé dans le plan des axes de suspension et d'oscillation; le premier de ces axes étant le tranchant, ou l'arête du couteau C, et le second le tranchant du couteau O; en faisant $CG = a$,

$GO = \frac{K^2}{a}$, on a la longueur du pendule simple

$$L = a + \frac{K^2}{a}.$$

Lorsqu'on renverse le pendule, pour le faire osciller autour du couteau O, le tranchant du couteau C devient l'axe d'oscillation; le moment d'inertie, par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité G, et qui est parallèle aux deux autres axes, ne change pas; ainsi la quantité K conserve la même valeur, et $\frac{K^2}{a}$ est la distance de l'axe de suspension au centre de gravité: en mettant cette quantité à la place de a, l'équation précédente devient

$$L = \frac{K^2}{a} + a;$$

il n'y a de changé que l'ordre des termes. Dans l'un et l'autre de ces deux cas, $\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ exprime la durée d'une très-petite oscillation du pendule.

Réciproquement, si le pendule composé fait de très-petites oscillations de même durée, lorsqu'il est suspendu alternativement aux deux couteaux parallèles C et O, et que le centre de gravité G du pendule soit dans le plan des tranchants des deux couteaux, la distance de ces tranchants sera la longueur du pendule simple qui fait aussi ses oscillations dans le même temps.

Appelons a et a' les distances CG et OG des couteaux au centre de gravité G; puisque les oscillations du pendule composé, autour des deux couteaux, sont de même durée, les pendules simples sont de même longueur, ce qui donne

$$a' + \frac{K^2}{a'} = a + \frac{K^2}{a}, \qquad a'^2 - \left(a + \frac{K^2}{a}\right) a' = - K^2;$$

on tire de cette équation du second degré

$$a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{K^2}{a}\right) \pm \frac{1}{2}\left(a - \frac{K^2}{a}\right);$$

la première valeur de l'inconnue $a' = a$ doit être rejetée, parce que les tranchants des couteaux, ou les axes de suspension et d'oscillation, ne sont pas équidistants du centre de gravité; en substituant dans la première équation la seconde valeur de $a' = \frac{K^2}{a}$, ou $a = \frac{K^2}{a'}$, on aura

$$a' + a = a + \frac{K^2}{a},$$

ce qui est conforme à l'énoncé de la proposition.

D'après un rapprochement heureux fait par Huygens de sa belle théorie des développées au mouvement du pendule, il imagina de faire décrire à celui-ci une cycloïde, et l'une des propriétés de cette courbe est de rendre les oscillations isochrones, indépendamment de leurs amplitudes.

C'est aussi à Huygens que l'on doit la découverte du passage du mouvement d'un corps qui descend sur une courbe, par l'impulsion de la pesanteur, au mouvement du pendule qui décrit cette courbe : occupons-nous d'abord du problème qui a pour objet le premier de ces mouvements.

303. Un corps étant assujetti à se mouvoir sur une cycloïde, proposons-nous de chercher la loi de son mouvement.

La solution de ce problème est fondée sur la loi générale de la chute des corps; la vitesse qu'ils acquièrent est la même, soit par leurs chutes verticales, soit en descendant de la même hauteur, sur des plans inclinés, ou sur des courbes tracées dans des plans verticaux (**282**).

Soit la cycloïde ADB (*fig.* 161), tracée dans un plan vertical au-dessous de sa base AB; menons, par le sommet D, les axes rectangulaires Dx, Dy; le premier de ces axes coïncide avec le diamètre DE du cercle générateur. Le point de départ du corps qui doit descendre sur cette courbe, sans vitesse initiale, étant en L, soit M le point où il est arrivé au bout du temps t; en menant les ordonnées LN, MP, faisant DN $= h$, DP $= x$, et désignant par v la vitesse que la gravité g a communiquée au mobile, on aura

$$v = \sqrt{2g(h-x)};$$

en faisant l'arc DM $= s$, et observant que cet arc diminue lorsque le temps t augmente, on a

$$v = -\frac{ds}{dt};$$

on tire de ces deux expressions de la vitesse

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Pour intégrer cette équation, il faut en éliminer ds; le triangle rectangle élémentaire Mnm donne

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

l'origine des coordonnées x et y étant au sommet D de la cycloïde, et le rayon de son cercle générateur étant représenté par a, elle a pour équation différentielle

$$dy = \frac{(2a-x)dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}(2a-x)^{\frac{1}{2}};$$

substituant cette valeur à la place de dy dans l'équation précédente, elle devient

$$ds = \sqrt{dx^2 + \frac{dx^2}{x}(2a - x)} = dx\sqrt{\frac{2a}{x}};$$

cette valeur de ds étant substituée dans l'expression différentielle du temps, on aura

$$dt = \frac{-dx\sqrt{\frac{2a}{x}}}{\sqrt{2g(h-x)}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{-dx}{\sqrt{hx - x^2}}.$$

Le dernier facteur peut être transformé de la manière suivante:

$$\frac{-dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{-\frac{dx}{\frac{1}{2}h}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{4}h^2 - (x^2 - hx + \frac{1}{4}h^2)}{\frac{1}{4}h^2}}} = \frac{-\frac{dx}{\frac{1}{2}h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right)^2}} = d\,\text{arc}\left(\cos = \frac{x - \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right);$$

en mettant ce résultat dans l'équation précédente, et prenant ensuite l'intégrale de chaque membre, il viendra

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\text{arc}\left(\cos = \frac{2x - h}{h}\right) + C;$$

à l'origine du mouvement, on a $t = 0$, $x = h$, et par conséquent la constante $C = 0$.

Lorsque le mobile est descendu au sommet D, on a

$$x = 0,\ \text{arc}\left(\cos = \frac{0 - h}{h}\right) = \text{arc dont le cosinus est } -1;$$

cet arc est la demi-circonférence $= \pi = 3,14159\ldots$; d'après

toutes ces transformations, la formule devient

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Cette dernière formule ne renferme pas la quantité h, qui exprime la hauteur verticale du point de la courbe qui a été pris pour l'origine du mouvement; il en résulte qu'uu mobile qui descend sur la cycloïde, par l'action de la pesanteur, arrive dans le même temps au point le plus bas de cette courbe, quel que soit le point d'où il est parti. Cette propriété remarquable s'appelle *tautochronisme;* ainsi la cycloïde est une courbe *tautochrone*.

Nous avons déjà trouvé (197) que dans le cercle dout le plan est vertical, toutes les cordes menées par l'extrémité inférieure du diamètre vertical, à différents points de la circonférence, sont parcourues dans le même temps par des mobiles soumis à l'action seule de la pesanteur; c'est nne propriété analogue à celle de la cycloïde que nous venons de démontrer, ou une espèce de tautochronisme, mais il y a cette différence que dans le cercle, le mobile descend sur une ligne droite, au lieu que dans la cycloïde, c'est sur la courbe elle-même que le mobile descend; il faut encore observer que daus l'un et l'autre cas, nous faisons abstraction des obstacles produits par le frottement et la résistance de l'air.

304. Une autre propriété très-curieuse de la cycloïde, que nous nous bornerons à expliquer succiuctement, en renvoyant aux traités de Mécanique rationnelle pour la démonstration, est celle dont la découverte est due à Jean Bernoulli : en 1696, il proposa aux géomètres de chercher la courbe qu'il nomma *brachystochrone,* ou la courbe de la plus vite descente; c'est-à-dire qu'on demande la ligne que doit suivre un corps, sol-

licité par l'action seule de la pesanteur, pour aller, dans le temps le plus court, de l'un à l'autre de deux points donnés, qui ne sont ni dans la même verticale ni dans la même horizontale.

Soit AMND (*fig.* 162) la courbe de la plus vite descente entre les points A et D; du point A soit menée l'horizontale AE; si des extrémités M et N d'un élément MN de la courbe, on mène deux normales, elles formeront l'angle infiniment petit MLN, et l'on prouve, par l'analyse infinitésimale, que le temps employé par le mobile à décrire l'élément MN étant un minimum, la normale LM est coupée au point K, par l'horizontale AE, en deux parties égales, ce qui est une propriété du rayon de courbure de la cycloïde : d'où l'on conclut que la courbe de la plus vite descente AMND est un arc de cycloïde dont la base coïncide avec l'horizontale AE, et qui a le point A pour origine.

Pour tracer cette courbe on cherchera d'abord, par le procédé suivant, le diamètre de son cercle générateur.

Avec un cercle générateur d'un diamètre quelconque, on décrira sous l'horizontale AE, la cycloïde AFI; joignant ensuite AD, et menant la corde FI, on aura

$$AF : AD :: AI : \frac{AD \times AI}{AF}.$$

Cette quatrième proportionnelle, dont on obtient la valeur, soit par le calcul, soit en menant du point D une parallèle à FI, est la base de la cycloïde qui a son origine au point A et qui passe par le point D; il est facile d'en déduire le diamètre de son cercle générateur.

D'après les détails que nous venons de donner sur la cycloïde, on voit que cette courbe est en même temps tauto-

chrone et brachystochrone dans la vide; la première de ces propriétés a été appliquée par Huygens, en la combinant avec celle des développées, pour construire le pendule cycloïdal.

305. Décrivons au-dessus de l'horizontale AB (*fig.* 161), avec un cercle générateur dont le diamètre EC=ED, les deux demi-cycloïdes CA, CB, qui se touchent au point C, et qui ont leurs sommets aux points A et B; imaginons que ces demi-cycloïdes soient tracées dans deux lames de métal de même courbure, et qu'un fil inextensible, parfaitement flexible, d'une longueur égale à CD, ou au double du diamètre EC du cercle générateur, soit attaché par l'un de ses bouts au point de contact C des deux demi-cycloïdes, que l'autre bout du fil porte un poids, ce qui formera un pendule.

En enroulant le fil autour de la demi-cycloïde CA, et l'abandonnant ensuite à l'action de la pesanteur, il se déroulera, la partie qui aura quitté la courbe sera tendue en ligne droite, comme on le voit au point L; dans la descente du poids, il décrit la développante AMD, qui est une demi-cycloïde égale à sa développée AC.

Le pendule arrive dans la verticale CD, avec une vitesse qui lui fait décrire la demi-cycloïde DB en s'enroulant sur l'arc cycloïdal CB, et il continuera ses oscillations qui seront isochrones, ou de même durée, quelles que soient leurs amplitudes, d'après la propriété du tautochronisme de la cycloïde.

Cet appareil se trouve dans quelques cabinets de physique: il y en a un au Conservatoire des Arts et Métiers, dans le cabinet que Charles avait formé pour les expériences des cours publics qu'il faisait avec de grands succès, qui ont contribué aux progrès des sciences et des arts.

Dans une visite que nous y fîmes, MM. Breguet, le docteur Ure et moi, nous fûmes reçus par cet habile physicien, qui

était alors président de l'Institut; en nous montrant ce qu'il y avait de plus intéressant parmi cette nombreuse collection d'appareils, disposés avec beaucoup d'ordre dans une vaste galerie, il nous fit voir diverses expériences, principalement celles qui sont relatives à la pesanteur et aux oscillations isochrones du pendule cycloïdal; il nous raconta que ces expériences avaient beaucoup intéressé le célèbre Lagrange : nous connaissons cela par le calcul, disait-il, mais on aime à en voir les résultats rendus sensibles par les expériences.

CHAPITRE XIV.

APPLICATION DU PENDULE AUX HORLOGES.

306. Toutes les fois qu'on remonte à l'origine des découvertes sur lesquelles est fondée la dynamique, le nom de Galilée se présente : c'est par lui qu'ont été faites les premières découvertes sur le pendule ; il explique quelques-unes de ses propriétés dans un ouvrage imprimé à Paris en 1639. Dans ses dernières années, cet illustre philosophe s'était proposé, avec son fils, d'appliquer le pendule pour régler le mouvement des horloges ; c'est à Huygens qu'il était réservé d'exécuter ce projet.

Depuis plus de deux siècles on construisait des horloges à roues dentées ; les premières qui ont été faites étaient des horloges d'un grand volume, pour être placées dans les clochers ou les tours de quelques grands édifices publics ; les roues étaient en fer, et l'ajustement de toutes les parties n'était qu'un travail de grosse serrurerie ; mais les inventeurs avaient trouvé le mécanisme principal tel qu'il existe à présent, il n'y avait que le régulateur à remplacer et à perfectionner l'exécution des autres pièces.

Le régulateur des anciennes horloges est un balancier suspendu par un cordon ; il est composé d'un axe vertical qui porte deux palettes ; ses extrémités entrent dans des collets, et il tourne avec peu de frottement sur le pivot de sa partie inférieure ; il porte, à sa partie supérieure, une traverse horizontale à laquelle on suspend, de chaque côté du centre,

un poids qu'on peut en approcher on en éloigner, pour régler son mouvement. La roue de rencontre, ou d'échappement, est une roue à couronne dont l'axe est horizontal; ses dents, dont la forme est triangulaire, et qui sont inclinées, viennent frapper les palettes de l'arbre du balancier, et lui communiquent un mouvement alternatif, dont les effets régularisent celui qui est communiqué par un poids au rouage de l'horloge.

Pour remplacer le balancier par le pendule, Huygens a changé les situations de l'axe qui porte les deux palettes et de celui de la roue d'échappement, de sorte que le premier est horizontal et le second vertical.

Le pendule est suspendu par un fil dont les deux bouts sont fixés à une traverse horizontale convenablement placée au-dessus du rouage; une tige qu'on a nommée fourchette est ajustée perpendiculairement au bout de l'arbre des palettes; sa partie inférieure, qui est courbée, a deux branches entre lesquelles passe la tige du pendule. Le mouvement qui lui est communiqué par le moyen de la fourchette compense celui qui lui est enlevé par le frottement et la résistance de l'air, mais l'échappement à roue de rencontre fait décrire au pendule des arcs dont l'amplitude, qui n'est pas constante, peut aller au-delà de 20 degrés; par conséquent ses oscillations ne sont pas de même durée.

Cette substitution, qui avait été essayée par Huygens en 1657, fut publiée l'année suivante, et on l'employa dans la construction de quelques horloges.

La propriété du tautochronisme de la cycloïde, et celle des développées, fournirent à Huygens le moyen de remédier à l'inconvénient de l'inégalité des oscillations du pendule, lorsqu'il décrit des arcs qui ne sont pas très-petits; il publia dans

son *Horologium oscillatorium,* imprimé en 1673, les belles découvertes géométriques et mécaniques qu'il avait faites pendant les seize années qui s'étaient écoulées depuis ses premiers essais.

Au lieu du pendule ordinaire qui décrit des arcs de cercle, Huygens imagina la disposition suivante, que nous avons déjà expliquée (305).

Le pendule est composé d'une tige de métal, dont l'extrémité inférieure porte un poids en forme de lentille; l'extrémité supérieure de la tige est traversée par un fil dont les deux bouts sont fixés sur l'horizontale qui passe par le contact C de deux arcs de cycloïde CI, CK (*fig.* 161); ces arcs sont formés de deux lames de cuivre, leur courbure est celle d'une cycloïde dont le cercle générateur a pour diamètre la moitié de la distance comprise entre le point de suspension et le centre d'oscillation du pendule.

En écartant le pendule de la verticale, et l'abandonnant à l'action de la pesanteur, le fil s'applique alternativement sur les arcs cycloïdaux CI, CK; son centre d'oscillation décrit des arcs de cycloïde, et, d'après la propriété du tautochronisme de cette courbe, quelles que soient les amplitudes des oscillations du pendule, elles seront toutes de même durée.

Cette ingénieuse disposition est fondée sur une théorie géométrique rigoureusement démontrée; à l'époque où elle a été publiée par Huygens, c'est ce que l'on pouvait faire de mieux, parce qu'on ne connaissait encore que l'échappement à roue de rencontre, qui fait décrire de grands arcs au pendule.

Dans la suite, le travail des ajustements qui était grossièrement exécuté, a été successivement perfectionné par des artistes habiles; en adoptant, comme Huygens l'avait fait, le mécanisme des horloges, leurs recherches ont eu pour objet

de le compléter; ils trouvèrent des échappements avec lesquels le pendule ne décrit que de petits arcs de cercle, qui se confondent sensiblement avec l'arc correspondant de la cycloïde; alors les arcs cycloïdaux de la suspension devinrent inutiles, et on les supprima.

C'est par des travaux continués pendant plus d'un siècle, après les découvertes faites par Huygens, qu'on est parvenu à construire des horloges d'une aussi grande régularité que celle dont nous allons brièvement expliquer les principales parties.

Depuis Huygens, qui réunissait le génie des découvertes à celui d'en faire des applications utiles aux arts, la théorie et les applications ont fait de rapides progrès, en se prêtant de mutuels secours. Quoique ce qui restait à faire pour le perfectionnement des horloges soit dû principalement aux travaux d'un petit nombre d'artistes éminents, ils n'ont pu obtenir de véritables succès qu'en s'appuyant sur des principes puisés dans les mathématiques, et les communications entre les savants et les artistes n'étaient pas moins nécessaires aux uns qu'aux autres.

Parmi les artistes qui ont le plus contribué à perfectionner la construction des ouvrages d'horlogerie, je n'en citerai que deux : Ferdinand Berthoud et Breguet, qui ont été horlogers de la marine et membres de l'Institut. Le premier a publié beaucoup d'ouvrages, parmi lesquels on distingue son *Essai sur l'Horlogerie*, en 2 vol. in-4°, imprimé en 1763, et réimprimé en 1786 sans aucun changement; cet ouvrage doit beaucoup, dit l'auteur, au célèbre astronome l'abbé de la Caille, qui avait professé les sciences mathématiques au collége Mazarin, et publié, sur toutes les branches principales, de bons ouvrages élémentaires, qui ont été souvent réimprimés.

La Caille était un homme entièrement dévoué aux sciences, il leur consacrait les jours et la plus grande partie des nuits; s'il a obligé ceux qui cultivent les arts en améliorant l'*Essai sur l'Horlogerie* de Berthoud, son exemple a été suivi par l'abbé Marie, qui lui a succédé comme professeur de mathématiques au collége Mazarin.

Breguet, voulant acquérir les connaissances de mathématiques dont il concevait l'utilité, commença d'abord à les étudier seul; il alla ensuite se mêler aux auditeurs de l'abbé Marie. Au commencement du cours ils étaient nombreux, mais à la fin Breguet resta presque seul; en finissant son cours, l'abbé Marie lui dit : Vous avez voulu entendre mes dernières paroles, venez me voir. Breguet se rendit à cette invitation; elle fut l'origine d'une amitié dont les relations n'ont cessé que lorsque l'abbé Marie a quitté la France.

Sans autre secours que son propre génie, un caractère empreint de toutes les qualités sociales, des talents acquis par le travail, et des connaissances très-étendues, qui étaient principalement le fruit de ses observations, Breguet est parvenu à former une maison et à y attacher une clientelle qui s'est étendue aux savants et aux princes de toutes les nations de l'Europe.

Parmi les nombreuses inventions de Breguet, on distingue: ses échappements à tourbillon et à force constante; son thermomètre métallique, qui a été adopté par les physiciens; on a généralement copié les formes élégantes qu'il a données à ses ouvrages, mais ce qui les distingue c'est la parfaite exécution et la disposition simple et ingénieuse de toutes les parties du mécanisme.

J'ai admiré ce beau travail, dont je ne puis donner qu'une idée bien incomplète, en examinant les détails de la pendule

astronomique établie sur les plans qu'il a laissés à ses successeurs; ils se sont empressés, avec l'obligeance que me montre cette excellente famille depuis environ trente ans, de mettre à ma disposition tout ce qui pouvait m'être utile pour me faciliter l'étude de ce chef-d'œuvre de l'horlogerie.

307. Dans une horloge à secondes, destinée à servir de pendule astronomique, on distingue quatre parties : le poids qui produit la force motrice, le rouage, l'échappement, et le pendule qui forme le régulateur.

Représentons-nous un poids suspendu à une corde enroulée dans la rainure en hélice du cylindre, ou du tambour C (*fig.* 163), dont l'axe passe par le centre de la roue D, fixée à l'une de ses bases; la descente du poids fera tourner la roue D et toutes les autres roues qui forment le rouage de l'horloge. Examinons d'abord la vitesse qui sera transmise à chaque roue.

La première roue D de 96 dents, fixée à la base du cylindre, engrène dans le pignon *d* de 12 ailes, ou dents, porté par l'arbre de la roue E; pour un tour de la roue D, la roue E fera

$$\frac{D}{d} = \frac{96}{12} = 8 \text{ tours ou révolutions.}$$

Pour un tour de la roue E, qui a 100 dents, et qui engrène dans le pignon de *e* 10 dents, porté par l'arbre de la roue F, cette roue fait 10 tours, par conséquent elle en fera 80 pour un tour de la roue C. La roue F, qui a 80 dents, engrène dans le pignon *f* de 10 dents, fixé sur l'arbre de la roue G; la troisième roue F fait donc 8 tours pour 1 tour de la roue E, et $80 \times 8 = 640$ pour un de la roue D.

La quatrième roue G a 75 dents; elle engrène dans le pignon *g* de 10 dents, porté par l'arbre de la cinquième roue S,

qui est la roue d'échappement; ainsi pour un tour de la roue G, la roue S fait 7,5 tours, et pour un tour de la première roue D, elle fait

$$640 \times 7,5 = 4800 \text{ tours.}$$

On voit (*fig.* 166) le plan de la roue d'échappement S, qui a 30 dents; elle fait un tour dans une minute; son arbre, dont l'axe passe par le centre du cadran, porte le canon sur lequel on place l'aiguille des secondes.

La disposition du rouage est représentée (*fig.* 165) en élévation de côté; AA, BB, sont deux platines de cuivre, assemblées parallèlement entre elles par quatre piliers; cet assemblage se nomme *la cage* de l'horloge.

On appelle *roues de cadran, ou minuterie,* les roues placées entre la platine AA et le cadran, pour communiquer le mouvement à l'aiguille des minutes et à celle des heures; la *fig.* 164 représente le plan de ces roues.

Sur l'arbre de la roue G, au-delà de la platine AA, on a fixé un pignon l de 12 dents; qui engrène dans la roue L de 96 dents, et sur l'arbre de celle-ci on a fixé une roue M de 48 dents, qui engrène dans la roue de renvoi N d'un même nombre de dents.

La roue d'échappement S fait un tour par minute; le pignon g de 10 dents, fixé sur l'arbre de cette roue, engrène dans la roue G de 75 dents, qui ne fait qu'un tour en 7 minutes et demie, et le pignon l de 12 dents, fixé sur son arbre, engrène dans la roue L de 96 dents; d'où il résulte que celle-ci fait un tour en $7\frac{1}{2} \times 8 = 60$ minutes ou une heure: c'est l'arbre de cette roue qui porte le canon de l'aiguille des minutes.

L'arbre de la roue de renvoi N porte le pignon h de 8 dents

qui engrène dans la rone H de 96 dents; c'est par cette roue que le mouvement est communiqué à l'aiguille des henres.

Toutes les roues et les autres pièces du mécanisme, représentées dans les *fig.* 163 à 167, sont dessinées de grandeur naturelle; la *fig.* 167 représente le cadran, avec les aiguilles qui marquent les secondes, les minutes et les henres.

On pourrait laisser la surface du cylindre C (*fig.* 163 et 165) toute unie; d'après la rainure ou hélice qu'on y a tracée, on voit que la corde peut y être enroulée de 12 tours: cherchons le temps qu'elle mettra à se dérouler, par la descente du poids, et avec les vitesses qui viennent d'être déterminées.

Puisque la roue d'échappement, dont la vitesse est d'un tour par minute, fait 4800 tonrs pendant que le cylindre en fait un, la vitesse du cylindre sera de $\frac{1}{4800}$ de tour dans une minute, ou dans $\frac{1}{1440}$ de jour, et l'on trouvera le nombre de jours qu'il mettra pour faire 12 tours par la proportion suivante

$$\frac{1}{4800} : \frac{1}{1440} :: 12 : x = 40;$$

c'est-à-dire que la pendule pourrait marcher 40 jours; mais il faut la remonter qnelques jours avant que la corde ne soit entièrement déroulée.

308. Pendant qu'on remonte le poids, son action sur le rouage est suspendue; un mécanisme, qu'on nomme *remontoir*, supplée à cette cessation momentanée de la force motrice.

Lorsqu'on fait tourner le cylindre avec la clef à remonter, en sens contraire du mouvement de rotation qui lui est communiqué par la descente du poids, le cliquet O (*fig.* 163) s'engage dans les dents de la roue à rochet *o* (*fig.* 163 et 165);

alors la roue D peut continuer à se mouvoir indépendamment du cylindre.

Il y a dans l'intérieur du cylindre, sur la face de la roue à rochet, qu'on nomme aussi *roue auxiliaire,* un ressort qui forme presque une circonférence: l'un de ses bouts est fixé à la roue auxiliaire par une cheville qui s'engage dans le cylindre; l'autre bout, qui est mobile, porte une cheville qui passe par une ouverture pratiquée dans la roue auxiliaire. En faisant rétrograder le cylindre, le ressort est bandé par un encliquetage; alors, par le moyen de la cheville qui traverse la roue auxiliaire, il agit sur la roue D, et il lui imprime, pendant tout le temps du remontage, un mouvement égal à celui du poids moteur.

Voici le tableau du rouage qui transmet le mouvement du poids moteur à la roue d'échappement; les rayons sont mesurés en prenant le millimètre pour unité de longueur.

ROUES.	DENTS.	RAYONS.	PIGNONS.	DENTS.	RAYONS.
			C		18
D	96	31,5	*d*	12	3,5
E	100	26,5	*e*	10	3
F	80	21	*f*	10	3
G	75	20,5	*g*	10	3
S	30	20			

Le poids moteur P (*fig.* 169) est un cylindre dont les parois sont en cuivre et l'intérieur en plomb; il pèse 3,125 kilogrammes; en ajoutant 0,075 pour le poids de la poulie et de sa chape, on a 3,2 kilogrammes. Ce poids est suspendu, avec une poulie mobile, par une corde à boyau, dont l'un

des bouts est attaché à un crochet fixé au cylindre C (*fig.* 165), sur lequel la corde s'enroule; l'autre bout entre dans un trou percé dans la boîte qui renferme le mécanisme, où il est retenu par un nœud. D'après cette disposition, la force motrice qui fait tourner le rouage est seulement la moitié du poids ou $\frac{3,2}{2} = 1600$ grammes.

309. Proposons-nous de chercher la partie de cette force motrice qui est transmise à la dernière roue du rouage, ou à la roue d'échappement.

Ce problème est une application de la règle (**134**) exprimée algébriquement par la formule

$$p = \frac{\mathrm{P}rr'r''\ldots}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}'\,\mathrm{R}''\ldots},$$

dans laquelle l'inconnue p représente la force qui doit agir sur la dernière roue, pour faire équilibre au poids P, appliqué au cylindre, ou au tambour, fixé à la première roue; $\mathrm{R}\,\mathrm{R}'\,\mathrm{R}''$.... est le produit des rayons de toutes les roues, et $r\,r'\,r''$.... celui des rayons des pignons; ces lettres étant remplacées par les valeurs que nous venons de déterminer, la formule devient

$$p = \frac{1600 \times 18 \times 3,5 \times 3 \times 3 \times 3}{31,5 \times 26,5 \times 21 \times 20,5 \times 20} = 0,378;$$

c'est-à-dire que la force transmise à la roue d'échappement est à peu près égale à celle qui serait produite par un poids de 3 décigrammes.

Ce résultat n'est qu'une approximation, parce que nous l'avons obtenu en faisant abstraction du frottement, et qu'au lieu des rayons moyens nous nous sommes bornés à prendre

leurs valeurs approchées; néanmoins le résultat que nous avons obtenu fait voir que la roue d'échappement ne reçoit qu'une très-petite force, et c'est de l'emploi, ou de la distribution de cette force, que dépend la justesse et la régularité de l'horloge.

310. Nous venons de trouver qu'une force motrice, produite par un poids de 1600 grammes, suspendu à la corde enroulée sur le cylindre fixé à la première roue, ne transmet à la dernière roue qu'une force égale à celle d'un poids d'environ 3 décigrammes.

Par le moyen du mécanisme qu'on nomme *échappement*, cette dernière force se combine avec le mouvement du pendule appliqué à l'horloge pour former son régulateur.

On connaît aujourd'hui dix ou douze bons échappements, mais on emploie généralement, dans les horloges à secondes, celui qu'on a nommé *échappement à ancre*. Clément, horloger à Londres, est le premier qui ait eu l'heureuse idée, en 1680, de le substituer à l'échappement à roue de rencontre, ce qui fit abandonner l'usage de la cycloïde.

L'échappement à ancre a été perfectionné, et sa forme primitive a été changée par Graham: celle que lui a donnée cet artiste célèbre a conservé son nom; c'est celle que les horlogers ont adoptée, en y faisant quelques modifications.

On fait la roue d'échappement S (*fig.* 166 et 165) très-légère, parce qu'elle n'a qu'une faible résistance à vaincre; elle est en cuivre, et ses dents, terminées comme celles d'une roue à rochet, sont taillées d'un côté en arcs de cercle; de l'autre côté elles sont droites, et un peu inclinées sur les rayons menés à leurs extrémités.

La pièce TUV, qu'on a nommée l'*ancre*, est taillée dans une plaque de cuivre; on a formé, aux extrémités de ses

branches, les palettes U et V, auxquelles on a ajusté, avec des vis, des garnitures en acier, et des pierres sont adaptées aux parties qui viennent en contact avec la roue d'échappement.

On a pratiqué une ouverture angulaire dans la tige, qui est traversée par une vis, ce qui donne un moyen facile pour régler l'écartement que doivent avoir les palettes.

La partie supérieure de la tige de l'ancre est assemblée par une vis à une autre tige de cuivre qui s'appelle la *fourchette;* cet assemblage des tiges de l'ancre et de la fourchette est traversé perpendiculairement par un axe autour duquel il peut librement osciller.

Voici comment les dents de la roue d'échappement agissent sur les palettes de l'ancre, et lui communiquent, ainsi qu'à la fourchette, un mouvement d'oscillation qui vient se combiner avec celui du pendule.

Après l'instant où l'une des dents de la roue s'est échappée de la palette U, l'oscillation s'achève et la roue S, soumise à l'action du poids moteur, tend à continuer son mouvement de rotation ; mais elle est arrêtée par la palette V, qui pénètre dans la denture : la suspension du mouvement dure encore pendant la demi-oscillation suivante; ensuite la tige de l'ancre passant au-delà de la verticale, la palette V abandonne la dent qu'elle retenait : cette dent avance en suivant le plan incliné de la palette qui s'écarte, et qui transmet au pendule la force qui lui est communiquée par la roue.

Un effet contraire est produit en même temps par l'autre branche de l'ancre; sa palette U entre dans la denture de la roue, en y pénétrant sans aller jusqu'au fond; elle arrête la dent qui vient s'appuyer, seulement par sa pointe, sur le rubis adapté à la face courbe intérieure de cette palette; pendant

l'oscillation la palette U s'élève, elle abandonne la dent qu'elle retenait; cette dent s'échappe au bout du plan incliné de la palette, et l'écartement de l'ancre transmet l'action du poids moteur au pendule, par l'intermédiaire de la fourchette.

De semblables effets se succèdent, et à chaque double oscillation de l'ancre elle laisse échapper une dent.

Ce n'est pas sans étonnement que l'on voit la régularité qu'on est parvenu à obtenir dans cette combinaison de mouvements et de repos, produite par l'action d'une force accélératrice agissant sur un système de roues dentées; leur mouvement devient uniforme, parce qu'elles éprouvent l'influence des oscillations isochrones du pendule, qui forme le régulateur de l'horloge.

311. On a donné au poids fixé à la partie inférieure du pendule la forme d'une lentille, afin de diminuer la résistance que l'air lui fait éprouver: cette lentille est en cuivre jaune ou laiton; elle est suspendue à une tige de fer FH (*fig.* 168), qui passe au milieu de l'assemblage du châssis ABA'B', dont les tiges AB, A'B' sont en fer, et le châssis intérieur CDD'C', dont les tiges CD, C'D' sont en zinc; nous nous occuperons bientôt de cette disposition, par laquelle on corrige l'effet de la dilatation du fer en lui opposant celui de la dilatation du zinc.

Les tiges de fer sont cylindriques, ainsi que celles de zinc, dont le diamètre est presque double de celui des premières; on voit (*fig.* 168 et 169) comment l'assemblage de ce double châssis, et de la tige qui porte la lentille, est formé par des traverses: celle de la partie supérieure est en laiton, elle est surmontée par une pièce plus étroite dont le milieu est vide, ce qui forme deux branches parallèles qu'on a taillées en crochets.

La suspension est à ressorts, elle est établie sur une partie saillante de la plaque de cuivre jaune MN; on accroche cette plaque à un mur contre lequel elle doit être solidement fixée. Les deux ressorts de suspension *n*, *n* sont en or; leurs parties inférieures sont fixées entre deux pièces de cuivre, avec des vis de cuivre qui les traversent, et le milieu de ces pièces de cuivre est traversé perpendiculairement par un petit cylindre dont les parties extérieures reçoivent les crochets du pendule. Les parties supérieures des ressorts sont pareillement arrêtées, avec des vis, au mécanisme ajusté contre la plaque de cuivre MN.

Les ressorts *n*, *n* sont tendus par le poids du pendule; lorsqu'on veut l'enlever, il est essentiel que la tension des ressorts ne soit pas entièrement supprimée; c'est pour cet objet que Breguet a adapté à la suspensiou un mécanisme supplémenmentaire.

Deux pièces rectangulaires de cuivre, entre lesquelles on a placé un ressort courbe en acier, sont posées sur les pièces fixes qui retiennent les parties supérieures des ressorts; cet assemblage est traversé verticalement par deux vis V, V, arrêtées dans la pièce supérieure; les pivots, taillés aux extrémités de leurs tiges, entrent dans les trous percés dans la pièce à laquelle on suspend les crochets du pendule. Une troisième vis U est placée entre les deux autres; elle a son écrou dans la pièce supérieure; en tournant cette vis, on peut faire descendre ou monter la pièce supérieure: dans le premier cas, on bande le ressort sur lequel cette pièce s'appuie; alors les tiges des vis V, V descendent, leurs pivots pressent la pièce fixée à la partie inférieure des ressorts de suspension *n*, *n*, qui restent tendus après que le pendule a été enlevé.

Toutes les parties du mécanisme de l'horloge, avec sa cage,

sont renfermées dans une boîte cylindrique de laiton : le cadran forme l'une des bases de ce cylindre, que les horlogers appellent le *boisseau;* l'autre base, qui reste ouverte, s'applique contre la plaque de cuivre MN, où elle est retenue par deux pattes qui entrent dans les supports N, N, et par une troisième patte arrêtée par le verrou M, que l'on fixe avec une forte vis. Pour accrocher le pendule aux ressorts de suspension, on le fait passer par une ouverture pratiquée dans la partie inférieure du boisseau ; une cheville *t*, fixée à la troisième traverse du pendule, entre dans la fourchette, qui est fixée avec une vis sur la tige de l'ancre, et qui oscille autour d'un axe dont le prolongement passe par le point de suspension du pendule.

Depuis le point de suspension S du pendule jusqu'à son extrémité inférieure *s*, sa longueur $Ss = 1^m,205$; il décrit, de chaque côté de la verticale, des arcs qui sont à peu près de $1^\circ \frac{1}{2}$. Pour évaluer l'amplitude de ces arcs, on a placé au bas de la lentille une règle horizontale divisée en degrés et quarts de degré ; la longueur d'un degré, tracé sur cette règle, est de 21 millimètres.

La distance de l'axe de l'ancre à l'extrémité inférieure de ses palettes est de 39 millimètres; elle décrit, de chaque côté de la verticale, des arcs dont l'amplitude n'est pas de 85 centièmes d'un millimètre.

312. Dans un même lieu, les temps des oscillations de deux pendules sont entre eux comme les racines carrées de leurs longueurs.

En appelant T, T' les temps ; N, N' les nombres correspondants d'oscillations ; L, L' les longueurs des pendules, on aura

$$\frac{T}{N} : \frac{T'}{N'} :: \sqrt{L} : \sqrt{L'};$$

lorsqu'on fait $T = T' = 1''$, l'équation suivante se déduit de cette proportion

$$N' = \frac{N\sqrt{L}}{\sqrt{L'}}.$$

Appliquons d'abord cette formule pour déterminer le nombre N' d'oscillations que ferait, pendant 24 heures de temps moyen, un pendule composé correspondant à un pendule simple dont la longueur $L' = 0^m,994$.

En faisant $L = 0,9938265$, $N = 86400$, et calculant par logarithmes, on aura

log N.	4.9365137
½ log L.	1.9986553
c. ½ log L'..............	10.0013068
log N'..............	14.9364758

$$N' = 86392,45.$$

Le pendule L' est de $\frac{1735}{10000}$ de millimètre plus long que le pendule à secondes; et, d'après le résultat que nous venons de trouver, on voit qu'avec un pendule de cette longueur, l'horloge retarderait chaque jour de $7'',55$.

Prenons pour inconnue la longueur L' du pendule; en résolvant l'équation par rapport à cette quantité, il viendra

$$L' = \frac{LN^2}{N'^2}.$$

Supposons que le nombre N' des oscillations du pendule soit de 86399 pendant 24 heures; les valeurs des autres lettres

étant les mêmes que dans le premier exemple, on aura

log L.	$\bar{1}$.9973105
2 log N.	9.8730274
c. 2 log N'.	0.1269826
log L'.	9.9973205

$$L' = 0{,}9938493$$
$$L = 0{,}9938265$$

Difference. 0,0000228

Cette différence, qui est comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{9}$ d'un millimètre, est l'accroissement de la longueur du pendule qui produit une seconde de retard dans la marche diurne de l'horloge.

313. Pour qu'une horloge puisse mesurer le temps avec une grande exactitude, il est nécessaire que le pendule qui lui sert de régulateur n'éprouve aucune variation dans sa longueur.

Cette condition est une conséquence de la propriété du pendule que nous venons d'expliquer.

Tous les métaux se dilatent lorsque leur température s'échauffe, et ils se contractent lorsqu'elle refroidit; mais les quantités de dilatation et de contraction ne sont pas les mêmes pour les métaux de différentes espèces : c'est par le moyen de cette inégalité de dilatation qu'on est parvenu à rendre ses effets nuls dans le *pendule compensateur;* on lui a donné ce nom parce que, d'après la manière dont il est construit, sa longueur n'est pas altérée dans les changements de température.

Dans le pendule (*fig.* 168) que nous avons décrit, la dilatation des tiges de fer tend à faire descendre le centre de la lentille; on a percé trois trous dans cette lentille pour y faire

entrer les extrémités inférieures des tiges de fer; celle du milieu, qui pénètre jusque vers le point G', est taillée en vis, elle porte un écrou qui arrête le centre G de la lentille au point où l'on veut le fixer; la partie supérieure de cette tige peut glisser dans les trous des traverses jusqu'au point F, où elle est arrêtée dans la traverse qui termine le châssis intérieur, dont les deux tiges sont en zinc.

Par cette disposition, les tiges de fer venant à se dilater, elles feraient descendre le centre de la lentille; mais en même temps le châssis de zinc, dont les parties inférieures de ses deux tiges sont arrêtées par la traverse BB', ne peut s'étendre que dans sa partie supérieure; en se dilatant, il élève la traverse CC', ainsi que le centre de la lentille, qui est soutenu par la tige de fer fixée au point F de cette traverse.

Puisque la dilatation des tiges de fer et celle des tiges de zinc agissent en sens contraire, il suffit, pour en détruire l'effet et rendre le pendule compensateur, de les égaler ou bien de rendre les longueurs des tiges de fer et des tiges de zinc telles que la dilatation des premières soit égale à celle des secondes; c'est ce que font les horlogers, d'après les expériences connues, et par des tâtonnements qu'on pourrait abréger en se servant des formules déduites de l'analyse suivante.

On se sert ordinairement, pour former le pendule compensateur des horloges à secondes, de tiges de fer et de tiges de cuivre jaune ou de laiton; mais comme la différence des dilatations de ces métaux est moindre que celle qui existe entre la dilatation du fer et celle du zinc, deux châssis ne suffiraient pas pour produire la compensation; on en emploie quatre (*fig.* 170), deux avec des tiges de fer et deux avec des tiges de cuivre; l'assemblage de ces châssis est facile à concevoir par l'inspection de la figure, où l'on voit que pour chaque double

châssis la dilatation des tiges de fer agit de haut en bas, et celle des tiges de cuivre de bas en haut.

En retranchant les longueurs des tiges de cuivre de celles des tiges de fer qui leur sont adjacentes, on a, pour l'expression de la distance du point de suspension S au centre de gravité G de la lentille,

$$SG = SE + AB + TV + FG - CD - UX.$$

Désignons par f la dilatation du fer, et par c celle du cuivre; si à une température quelconque t les dilatations de ces deux métaux se compensent, on aura

$$(SE + AB + TV + FG)\,ft - (CD + UX)\,ct = 0;$$

en remplaçant le premier facteur par sa valeur prise dans l'équation précédente, il vient

$$(SG + CD + UX)\,f - (CD + UX)\,c = 0,$$

d'où l'on tire

$$CD + UX = SG.\frac{f}{c-f};$$

mettant cette valeur de CD + UX dans la première équation, et transposant, il viendra

$$SE + AB + TV + FG = SG.\frac{c}{c-f}.$$

Dans le cas du pendule (*fig.* 168) dont le gril est formé seulement de trois tiges de fer et deux de zinc, les tiges TV et UX sont nulles; en désignant par k la dilatation du zinc, les autres notations restant les mêmes, l'avant-dernière équa-

tion devient

$$CD = SG.\frac{f}{k-f}.$$

La distance du point de suspension du pendule au centre de la lentille:

$$SG = 1^m,062;$$

Dilatation du fer..... $f = 0,001235$ suivant Lavoisier,
Dilatation du zinc... $k = 0,002942$ suivant Smeaton;

en substituant ces nombres dans la formule, on aura

$$CD = \frac{1,062 \times 1235}{1707} = 0^m,7683.$$

D'après les mesures prises sur le dessin, $CD = 0^m,870$; mais il faut observer que la tige de fer qui porte la lentille descend au-dessous de son centre jusque vers le point G', et que la dilatation de la pièce de cuivre suspendue aux ressorts est plus grande que celle du fer: d'où il suit qu'en négligeant ces parties dans le calcul, on a dû trouver, pour la tige de zinc, une longueur moindre que celle qui convient à la compensation.

C'est par de longs tâtonnements qu'on parvient à établir la compensation et à régler l'horloge avec une grande justesse; l'une des meilleures qui ait été construite par Breguet, qui sert depuis long-temps de régulateur, était en avance de 44'',32 sur le temps moyen, le 10 avril 1840; sa marche diurne était de 0'',132, ce qui fait à peu près 48'' de variation dans une année.

314. La lentille est formée de deux segments sphériques de cuivre jaune ou de laiton égaux entre eux; on peut calculer son volume par la règle suivante, qui se déduit d'une proposition que l'on démontre dans la géométrie élémentaire.

En appelant V le volume du segment, R le rayon de sa base, et H sa hauteur, on a

$$V = \tfrac{1}{2}\pi R^2 H + \tfrac{1}{6}\pi H^3;$$

c'est-à-dire qu'un segment de sphère à une base est égal à la moitié du cylindre de même base et de même hauteur, plus la sphère dont cette même hauteur est le diamètre.

Pour les deux segments qui forment la lentille, on aura

$$2V = \pi H\left(R^2 + \tfrac{1}{3}H^2\right).$$

En prenant les mesures sur le dessin dont l'échelle est de 4 décimètres pour un mètre, ou $\frac{2}{5}$ de la grandeur naturelle, on trouve

$$R = 0^{m},045 \times \tfrac{5}{2} = 0,1125,$$
$$H = 0,0075 \times \tfrac{5}{2} = 0,01875,$$
$$R^2 = \tfrac{1}{3}H^2 = 0,012773;$$

ces nombres étant substitués dans la formule, on aura, par le moyen des tables de logarithmes,

$\log \pi$	0.4971509
$\log H$	$\bar{2}.2730013$
$\log R^2 + \frac{1}{3}H^2$	$\bar{2}.1062929$
$\log 2V$	$\bar{4}.8764451$

$2V = 0,00075239$ mètre cube $= 0,75239$ décimètre cube.

Des expériences qui seront expliquées dans l'hydrostatique, ont fait connaître qu'un décimètre cube de laiton pèse 8,395 kilogrammes; en multipliant ce poids par le volume 0,75239, on trouve que le poids de la lentille est de 6,316 kilogram.

CHAPITRE XV.

DES CORDES VIBRANTES.

315. Une corde flexible et élastique étant tendue par une force équivalente à un poids, de sorte que chacune de ses extrémités soit arrêtée à un point fixe, elle peut être écartée de sa direction rectiligne, soit en la pinçant et l'abandonnant ensuite à elle-même, soit en la frappant à l'un quelconque des points de sa longueur; alors elle revient dans la ligne droite qui formait sa direction primitive, elle passe au-delà, parce qu'elle est poussée par la force qu'elle a acquise; lorsque cette force est épuisée, la corde revient dans la position d'où on l'avait fait partir, et elle continue à faire ainsi des vibrations analogues aux oscillations du pendule.

La longueur de cette corde étant donnée, ainsi que son poids et le poids qui exprime sa tension, il s'agit de déterminer le nombre de vibrations, très-petites, qu'elle fait pendant une seconde.

Cette question a exercé pendant longtemps la sagacité des plus célèbres géomètres, mais l'analyse qu'ils ont employée sort des limites dans lesquelles nous devons nous renfermer; on en trouvera les détails dans les Mémoires qu'ils ont publiés et dans les traités de Mécanique rationnelle; nous nous bornerons à leur emprunter la formule qu'ils ont trouvée pour la solution de ce problème difficile, curieux et intéressant.

Si l'on désigne la longueur de la corde par la lettre l, son

poids par p, le poids qui mesure sa tension par P, et la gravité, ou l'espace vertical que la pesanteur fait décrire à un corps, pendant la première seconde de sa chute, par g, la durée T de l'une des vibrations de la corde aura pour expression

$$T = \sqrt{\frac{lp}{gP}};$$

en appelant N le nombre de vibrations que la corde fait dans l'unité de temps, on aura

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{lp}{gP}}} = \sqrt{\frac{gP}{lp}}.$$

Il y a plusieurs conséquences importantes que l'on peut déduire de cette formule : on voit qu'elle est indépendante de la grandeur des amplitudes des vibrations de la corde, d'où il résulte qu'étant très-petites, elles sont isochrones.

Le son produit par une corde dépend de la valeur de N ; il est d'autant plus élevé que cette corde fait un plus grand nombre de vibrations dans une unité de temps, ou dans une seconde.

Pour une même corde, tendue par le poids P, le nombre N de ses vibrations est proportionnel à la racine carrée de ce poids.

Lorsque deux cordes différentes sont tendues par des poids égaux, le nombre des vibrations de chacune de ces cordes, pendant une seconde, est réciproquement comme le produit de sa longueur par son poids.

Dans le cas où l'on connaît seulement les dimensions de la corde, il est facile d'en tirer la valeur de son poids : soit r son rayon, π étant la demi-circonférence dont l'unité est le

rayon, le volume de la corde sera $\pi r^2 l$; en appelant k le poids de l'unité de volume de la matière de la corde, on aura

$$p = \pi r^2 lk.$$

Pour appliquer cette formule à un exemple, nous prendrons les valeurs suivantes, qui se rapportent à la corde n° 19 des expériences dont nous allons bientôt nous occuper.

Ces valeurs numériques, et celles dont nous ferons usage dans les calculs suivants, sont exprimées en mètres pour les longueurs, en mètres cubes pour les volumes, et en kilogrammes pour les poids.

Le poids du mètre cube d'acier, ou la valeur de $k = 7767$ kilogrammes, d'après les expériences de Muschenbroek; $\pi = 3,1416$; la longueur de la corde $l = 5^{p} 2^{p} 7^{l} = 1^{m},694$, et son rayon $r = 0^{m},0005355$; en mettant ces nombres à la place des lettres dans la formule, et calculant par logarithmes, on aura

$\log \pi$	0.4971509
$2 \log r$	$\bar{7}$.4575190
$\log l$	0.2289134
$\log k$	3.8902533
$\log p$	$\bar{2}$.0738366

$$p = 0,01185:$$

c'est le poids que nous avons trouvé en pesant cette corde.

La lettre p étant remplacée par sa valeur, celle de N devient

$$N = \sqrt{\frac{gP}{l^2 r^2 \pi k}} = \frac{1}{lr}\sqrt{\frac{gP}{\pi k}}.$$

Dans plusieurs sortes d'instruments de musique, le son est

produit par des cordes vibrantes, qu'on appelle aussi cordes sonores; celles qu'on emploie dans les pianos sont des cordes de fer, ou d'acier; il y a plusieurs tréfileries en France où l'on en fabrique, cependant celles qui viennent d'Angleterre obtiennent encore la préférence.

On sait que le tirage des cordes d'un piano est considérable, mais il est difficile de déterminer à quel poids il peut être évalué, ou de quelle résistance la caisse du piano doit être capable. Les expériences suivantes ont eu pour objet de résoudre cette question : elles serviront aussi à comparer la théorie des cordes sonores du piano, déduite de l'analyse, avec la méthode pratique que l'on suit dans la construction de cet instrument.

Ces expériences ont été faites dans le mois d'octobre 1834, chez M. Érard, par M. Daniel Klein, chef de ses ateliers, et moi; nous y avons consacré trois séances d'environ quatre heures chacune.

Un piano-clavecin, qui avait été accordé par M. Daniel, était placé à-côté de notre appareil, sur lequel une corde était tendue jusqu'à ce qu'elle fût à l'unisson avec celle qui avait les mêmes dimensions et qui était semblablement placée dans le piano.

Les cordes de pianos sont désignées par des numéros d'après leurs grosseurs, déterminées par une mesure (*fig.* 171 et 172) qu'on nomme *jauge* de fil de métal, *wire gauge;* c'est une petite lame d'acier dans laquelle on a taillé un angle de deux degrés: cette lame est enchâssée dans une monture de cuivre; les numéros sont indiqués par des points marqués d'un côté de l'angle par des nombres pairs et de l'autre côté par des nombres impairs.

En plaçant une corde dans l'angle de la jauge, les points

où elle vient en contact avec ses côtés indiquent le numéro de cette corde; pour avoir son diamètre il faut le mesurer : voici le procédé que nous avons suivi.

Une corde, de chacun des numéros que nous avons pris, a été enroulée d'environ 20 tours, qui se touchaient, sur un bâton de bois cylindrique; l'espace occupé par la corde sur ce cylindre, parallèlement à son axe, étant divisé par le nombre de tours compris dans cet espace, le quotient exprime le diamètre de la corde; ces opérations nous ont donné les résultats suivants.

NUMÉROS.	DIAMÈTRES.	NUMÉROS.	DIAMÈTRES.
11	$0^{m}000650$	15	$0^{m}000875$
$11\frac{1}{2}$	0,000700	16	0,000921
12	0,000700	17	0,000975
$12\frac{1}{2}$	0,000714	18	0,001000
13	0,000725	19	0,001071
14	0,000800		

L'appareil avec lequel nos expériences ont été faites est un monocorde; ABEF (*fig.* 173) est son élévation, ou sa projection verticale; GHIK (*fig.* 174) est une section faite par un plan perpendiculaire à sa longueur; et ABCD (*fig.* 175) est la projection horizontale de la face supérieure, ou de la table.

Cette table porte les deux chevalets *abcd*, *efgh* : celui-ci est fixe; la partie inférieure du premier, dont le profil a la forme d'un ⊥, entre dans une ouverture pratiquée au milieu de la table suivant sa longueur; ses bords sont plaqués extérieurement et intérieurement; on peut faire glisser le chevalet dans cette ouverture, on l'arrête avec une vis de pression, au point où il doit être fixé.

On fait une boucle à l'un des bouts de la corde, pour y faire entrer le crochet q du peson PQ, encastré à l'une des extrémités de la table du monocorde; cette corde vient s'appuyer sur le chevalet fixe en passant entre les points r et s; elle vient aussi s'appuyer, de la même manière, sur l'autre chevalet, et on la fait passer par un trou percé dans la cheville h; en tournant cette cheville avec une clef, la corde s'enroule autour, elle tire le ressort du peson, et le poids que l'aiguille marque sur le cadran est la mesure de la tension que la corde éprouve.

Pour mettre à l'unisson le ton d'une corde tendue sur le monocorde avec celui d'une corde de piano, on prend la longueur de celle-ci, on porte cette longueur sur la table du monocorde entre les chevalets, et l'on fixe le chevalet mobile avec la vis de pression; ensuite on place sur les chevalets, comme nous venons de l'expliquer, une corde du même numéro que celle du piano; lorsqu'on pince cette corde et qu'on la laisse échapper, il n'y a que la partie st, égale à la longueur de celle du piano, qui fait des variations; on tourne la cheville, on pince la corde et l'on frappe la touche correspondante du piano, jusqu'à ce qu'on ait obtenu l'unisson, et la tension de la corde, ou le poids tendant, est marqué par l'aiguille du peson.

A mesure que les longueurs des cordes diminuent, l'espace compris entre la cheville et le chevalet mobile augmente, et si l'on continuait de la même manière, il faudrait employer trop de longueurs de cordes superflues; pour éviter cet inconvénient, M. Daniel a imaginé le petit appareil (*fig.* 176), que l'on place derrière le chevalet mobile pour remplacer la cheville.

La Table suivante renferme les résultats de nos expériences, pour l'une des cordes de chacune des 78 touches ou des $6\frac{1}{2}$ octaves du piano.

N^{os} des touches.	NOTES.	CORDES.				TENSIONS	
		Numéros.	Longueurs.	Diamètres	Poids	au ton	à la rupture
1	ut	41/16	5^p 6^p 7^l	....	0,05250	15	20
2	ut$^{\sharp}$	39/16	5 6 3	....	0,04880	15	20
3	ré	38/16	5 5 10	....	0,04665	14	20
4	ré$^{\sharp}$	36/16	5 5 4	....	0,04090	16	22
5	mi	34/15	5 4 10	....	0,03750	14	22
6	fa	30/15	5 4 4	....	0,03288	12,5	24
7	fa$^{\sharp}$	28/14	5 3 7	....	0,02580	12,5	
8	sol	26/14	5 2 9	....	0,02320	14	
9	sol$^{\sharp}$	26/14	5 1 6	....	0,02320	14	
10	la	27/13$\frac{2}{3}$	5 0 2	....	0,02100	13	
11	la$^{\sharp}$	25/13	4 10 7	....	0,01895	15	
12	si	24/12$\frac{1}{2}$	4 8 4	0,000714	0,01705	15	
13	ut$_1$	23/12	4 5 10	0,000700	0,01670	14	
14	ut$^{\sharp}_1$	22/12	4 3 0	....	0,01140	10	15
15	ré$_1$	19	5 2 7	0,001071	0,01185	22	28
16	ré$^{\sharp}_1$	18	4 11 11	0,001000	0,01055	22,5	29
17	mi$_1$	17	4 8 11	0,000975	0,00925	22	
18	fa$_1$	16	4 6 4	0,000921	0,00780	20,5	
19	fa$^{\sharp}_1$	15	4 3 9	0,000875	0,00665	19,5	
20	sol$_1$	14$\frac{1}{2}$	4 1 4	....	0,00600	19	
21	sol$^{\sharp}_1$	14	3 11 0	0,000800	0,00490	17	
22	la$_1$	14	3 8 11	....	0,00470	17,5	
23	la$^{\sharp}_1$	13	3 6 10	0,000725	0,00412	17	
24	si$_1$	13	3 4 9	....	0,00394	17	
25	ut$_2$	13	3 2 9	....	....	17	
26	ut$^{\sharp}_2$	13	3 0 11	....	....	17	

Nos des touches	NOTES.	CORDES.			Nos des touches	NOTES.	CORDES.		
		Numér.	Longueurs.	Tensions.			Numér.	Longueurs.	Tensions.
27	ré$_2$	13	2^p 11^p 1^l	17	53	mi$_4$	12	0^p 8^p 8^l	20,2
28	ré$_2^\#$	13	2 9 1	17	54	fa$_4$	12	8 3	20,5
29	mi$_2$	12½	2 7 5	19,5	55	fa$_4^\#$	12	7 7	20,5
30	fa$_2$	12½	2 5 11	20	56	sol$_4$	12	7 4	20,5
31	fa$_2^\#$	12½	2 4 6	20,2	57	sol$_4^\#$	12	7 0	20,5
32	sol$_2$	12½	2 3 1	20,5	58	la$_4$	11½	6 7	21
33	sol$_2^\#$	12½	2 1 8	20,5	59	la$_4^\#$	11½	6 3	21
34	la$_2$	12½	2 0 5	20,5	60	si$_4$	11½	5 10	21
35	la$_2^\#$	12½	1 11 1	20,5	61	ut$_5$	11½	5 7	21
36	si$_2$	12½	1 9 11	20,5	62	ut$_5^\#$	11½	5 3	21
37	ut$_3$	12½	1 8 10	21	63	ré$_5$	11½	5 0	21
38	ut$_3^\#$	12½	1 7 8	21,5	64	ré$_5^\#$	11½	4 9	21
39	ré$_3$	12½	1 6 8	21	65	mi$_5$	11½	4 5	21
40	ré$_3^\#$	12½	1 5 8	21	66	fa$_5$	11½	4 2	21
41	mi$_3$	12½	1 4 8	21,5	67	fa$_5^\#$	11½	3 11	21
42	fa$_3$	12½	1 3 10	21,5	68	sol$_5$	11½	3 9	21
43	fa$_3^\#$	12½	1 3 0	21,5	69	sol$_5^\#$	11	3 6	21
44	sol$_3$	12	1 2 2	20	70	la$_5$	11	3 4	20
45	sol$_3^\#$	12	1 1 5	20	71	la$_5^\#$	11	3 1	20
46	la$_3$	12	1 0 8	20	72	si$_5$	11	2 11	20
47	la$_3^\#$	12	1 0 0	20	73	ut$_6$	11	2 9	20
48	si$_3$	12	0 11 4	20	74	ut$_6^\#$	11	2 8	20
49	ut$_4$	12	10 9	20	75	ré$_6$	11	2 6	20
50	ut$_4^\#$	12	10 2	20	76	ré$_6^\#$	11	2 4	20
51	ré$_4$	12	9 7	20	77	mi$_6$	11	2 2	20
52	ré$_4^\#$	12	9 2	20	78	fa$_6$	11	2 1	21,5

Pour déterminer, d'après cette table, le tirage de toutes les cordes du piano, nous observerons qu'il n'y a que deux cordes à chacune des cinq premières notes, ou des cinq premières touches; les soixante-treize autres notes ont chacune trois cordes.

En additionnant séparément les tensions des cinq premières cordes, et celles des soixante-treize autres cordes, multipliant par 2 la première somme et par 3 la deuxième, on aura

N° 1 à 5..	74	× 2 =	148
6 à 78..	1408,9	× 3 =	4226,7
		Total....	4374,7.

La caisse du piano doit être capable de résister, sans éprouver de flexion, à ce poids de 4374^{kil},7 qui représente le tirage de toutes les cordes.

Quoique les tensions aient été poussées jusqu'à la rupture pour les cordes de quelques numéros, on ne peut pas en conclure que ces dernières tensions des cordes expriment le poids qu'elles peuvent soutenir, parce qu'on leur fait décrire des lignes brisées sur les chevalets du piano, ce qui en altère la ténacité; les expériences suivantes ont été faites pour déterminer ce dernier poids.

Les trois cordes enveloppées de trait, n°s 41/16, 28/14, 22/12, ont été accrochées par des boucles à des pointes enfoncées dans une poutre, et des poids ont été suspendus à chacune de ces cordes; elles se sont rompues près des boucles avec les charges suivantes :

41/16.....	131^{lb}	=	64^{k},124,
28/14.....	100	=	48,950,
22/12.....	81	=	39,649.

Nous allons calculer les vibrations de quelques-unes des cordes du piano, en prenant les valeurs numériques dans la table de nos expériences.

Pour la première corde, ou la note ut, on a :

$g = 9{,}8089$,
$P = 15$ kilogrammes, poids pour produire le ton,
$l = 5^p 6^p 7^l = 1^m{,}8024$, longueur de la corde,
$p = 0{,}0525$ poids de la corde;

en substituant ces nombres à la place des lettres dans la formule

$$N = \sqrt{\frac{gP}{lp}},$$

et calculant par logarithmes, il viendra

$\frac{1}{2}\log g$	0.4958101
$\frac{1}{2}\log P$	0.5880457
c. $\frac{1}{2}\log l$	9.8720744
c. $\frac{1}{2}\log p$	10.7607168
$\log N$	21.7166470

$N = 52{,}07$ vibrations dans une seconde.

Un calcul semblable fera connaître que la corde n° 13 de la note ut, à l'octave, fait dans le même temps

$N_1 = 94{,}73$ vibrations.

Le poids de la corde n° 25, ou de la troisième octave ut_2, n'est pas indiqué dans le tableau, mais on connaît le rayon de cette corde; on calculera le nombre de vibrations qu'elle fait dans une seconde par la formule

$$N_2 = \frac{1}{r_2 l_2}\sqrt{\frac{gP_2}{\pi k}},$$

dans laquelle on remplacera les lettres par les nombres suivants, et les tables de logarithmes donneront

$g = 9,8089$	$\frac{1}{2}\log g$..........	0.4958101
$P_2 = 17$	$\frac{1}{2}\log P_2$..........	0.6152244
$r_2 = 0,0003625$	c. $\log r_2$..........	13.4406920
$l_2 = 1,0489$	c. $\log l_2$..........	9.9792659
$\pi = 3.1416$	c. $\frac{1}{2}\log \pi$..........	9.7514246
$k = 7767$	c. $\frac{1}{2}\log k$..........	8.0548733
	$\log N_2$..........	42.3372903

$$N_2 = 217,41 \text{ vibrations.}$$

En appliquant cette formule aux octaves suivantes, on trouvera, par des opérations semblables,

N° 37	ut_3	$N_3 = 420,05$,
49	ut_4	$N_4 = 880,36$,
61	ut_5	$N_5 = 1736,88$,
73	ut_6	$N_6 = 3706,23$,
78	fa_6	$N_7 = 5072$.

La suite des résultats que nous venons d'obtenir, pour les nombres de vibrations que font les cordes des octaves successives pendant une seconde, ne forment pas exactement, comme la théorie l'exige, une progression géométrique qui a 2 pour exposant; si l'on divise chaque terme de cette suite par celui qui le précède, on trouvera

$$\frac{N_1}{N} = 2 - 0,18; \quad \frac{N_4}{N_3} = 2 + 0,09;$$
$$\frac{N_2}{N_1} = 2 + 0,29; \quad \frac{N_5}{N_4} = 2 - 0,03;$$
$$\frac{N_3}{N_2} = 2 - 0,07; \quad \frac{N_6}{N_5} = 2 + 0,13.$$

Toutes ces différences sont alternativement négatives et positives, c'est de l'octave dans laquelle se trouve le passage des cordes filées aux cordes simples que provient la plus grande. Nous avons pris, pour le poids de chaque corde filée, la moyenne entre le poids de la corde et celui de sa tige.

Pour donner encore quelques exemples, nous allons d'abord calculer, par la même formule

$$n = \frac{1}{lr}\sqrt{\frac{gP}{\pi K}},$$

les vibrations de la corde n° 46 la_3; c'est en partant de cette note, dont le son doit être à l'unisson avec celui du diapason, que les accordeurs commencent à accorder le piano.

D'après la table des expériences, on aura les valeurs suivantes pour les lettres de la formule, et l'on trouvera, comme on le voit à côté de ces lettres, le nombre des vibrations de la corde par le moyen des logarithmes.

$g = 9,8089$	$\frac{1}{2}\log g$	0.4958101
$P = 20$	$\frac{1}{2}\log P$	0.6505150
$\pi = 3,1416$	c. $\frac{1}{2}\log \pi$	9.7514246
$k = 7767$	c. $\frac{1}{2}\log k$	8.0548734
$r = 0,00035$	c. $\log r$	13.4559320
$l = 0,34288$	c. $\log l$	10.4648578
	$\log n$	42.8734129

$$n = 747,16.$$

En appliquant la formule on trouvera de la même manière, pour les cordes des notes

$$\text{N° } 34 \ \text{la}_2 \ n' = 384,72,$$
$$41 \ \text{mi}_3 \ n'' = 577,20;$$

l'intervalle des deux premières notes comprend une *octave*, le rapport des vibrations de leurs cordes $\frac{n}{n'} = 2 - 0,06$; celui de la seconde et de la troisième note comprend une *quinte*, et l'on a, pour le rapport des vibrations de leurs cordes,

$$\frac{n'}{n'_{\prime}} = 1,5 = \frac{3}{2}.$$

Ces exemples suffisent pour montrer comment les règles de la théorie peuvent être vérifiées par l'expérience.

Après l'orgue, qui par sa prééminence tient un rang à part, le principal instrument de musique est le piano-clavecin, appelé communément piano à queue, auquel il faut joindre les pianos de diverses formes, qui en sont des variétés. La fabrication de ces instruments a été créée à Paris, par Sébastien Érard, il y a environ soixante ans; il a légué sa succession à son neveu, Pierre Érard, qui est parvenu à se placer au premier rang de tous ceux qui exercent maintenant cette belle et importante branche des arts industriels.

Le génie, disait Buffon, est une grande aptitude à la patience; c'est par cette patience, et par un travail opiniâtre et continué malgré les infirmités qui ont affligé ses dernières années, que Sébastien Érard a obtenu des succès brillants et durables; il a marqué sa carrière par des découvertes parmi lesquelles celle de son piano-clavecin, dont je vais expliquer succinctement le mécanisme, suffirait pour faire passer son nom à la postérité.

Ce mécanisme est représenté (*fig.* 177) dans sa position de repos; on voit que les pièces intermédiaires entre la touche AB et le marteau LM, sont une combinaison de leviers, avec un fil d'acier *feh* qui forme un ressort à deux branches.

La pièce DE se nomme *le pilote* de la touche; il peut tourner autour des axes qui le traversent perpendiculairement vers ses extrémités, et il communique le mouvement qui lui est imprimé par la touche à la pièce FGH en la faisant tourner autour de l'axe qui la traverse au point G, perpendiculairement à sa longueur.

Deux montants IK, NP sont assemblés sur FG; le premier porte la palette C, qu'on nomme attrape-marteau.

L'une des principales parties de ce mécanisme consiste dans la pièce angulaire RFS qui forme l'échappement; FS est son pilote, et PQ se nomme le levier d'échappement.

Si l'on pose un poids de 100 grammes à l'extrémité A de la touche, elle descendra en tournant sur son appui U, et son pilote DE fera monter les pièces intermédiaires ainsi que le marteau; l'extrémité R de FR viendra sous la base V d'un petit cylindre fixé au châssis où elle sera arrêtée; alors les autres pièces continuant à se mouvoir, le pilote FS, dont l'extrémité supérieure soutenait le marteau par le moyen du rouleau O fixé à son manche, s'échappera, le manche du marteau viendra s'appuyer sur le levier d'échappement par une petite pièce S de métal dont la forme est celle d'un ⊥.

Un poids de 50 grammes placé au point A, met la touche en équilibre dans ses diverses positions; il faut 20 grammes pour équilibrer l'étouffoir, et 3 grammes font équilibre au marteau; la touche étant retirée, un poids de 7 grammes met en équilibre les pièces intermédiaires.

La pièce FGH est un levier intermédiaire dont le second bras GH est chargé d'un petit morceau de plomb pour augmenter son poids; il est traversé vers son extrémité H par une tige de fer ou d'acier, dont la partie supérieure, courbée en équerre, vient s'appuyer sur le talon de la tige de l'étouf-

foir; par cette disposition, l'étouffoir descend lorsque le marteau monte pour frapper la corde.

En enlevant le poids qui était placé sur la touche, son pilote fait descendre les pièces intermédiaires, l'étouffoir remonte, et la branche *eh* du ressort ramène le pilote FS d'échappement sous le rouleau O fixé au manche du marteau.

Lorsqu'on frappe la touche avec le doigt, le marteau saute contre la corde, la fait résonner, l'abandonne, et l'étouffoir vient faire cesser le son, que l'on a souvent besoin de répéter avec rapidité; cette répétition s'obtient ici sans qu'il soit nécessaire de laisser entièrement retomber le marteau : si le doigt ne laisse remonter la touche qne d'une très-petite quantité, la palette C retiendra le marteau, et l'échappement donnera le moyen de répéter le son à volonté, par de très-petits mouvements du doigt sur la touche.

La *fig.* 177ᵉ est la projection horizontale des trois cordes de la note n° 39, $ré_3$; le marteau frappe ces cordes en X, à peu près à la huitième partie de la distance de l'agrafe Y au chevalet Z; la même disposition a lieu pour toutes les cordes des autres notes.

On observe que pour un très-petit angle que le doigt fait décrire à la touche, celui que le marteau décrit est considérable; proposons-nous de déterminer le rapport de ces deux angles.

En frappant la touche, le doigt lui fait décrire un espace de 4 lignes (9 millimètres); nous pouvons prendre cet espace pour la longueur de l'arc décrit par le point A de la touche, avec le rayon $r = AU = 0^m,2$; $\pi = 3,14$ étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, nous aurons l'angle décrit par la touche

$$\frac{180^\circ \times 0,009}{\pi r} = 2^\circ,5 = 2^\circ 30'.$$

Pendant que le point A décrit un angle de $2^\circ 30'$ en descendant, le point D décrit, en montant, un angle égal de l'autre côté du point d'appui, avec le rayon $r' = \mathrm{UD} = 0^m,135$; l'arc de cet angle a pour mesure

$$\frac{2,5\pi r'}{180} = 0^m,006.$$

Dans ces calculs approximatifs, nous pouvons supposer que le mouvement transmis par le pilote de la touche à celui d'échappement fait décrire au rouleau O, ou au point correspondant du manche du marteau, avec le rayon $r'' = \mathrm{LO} = 0^m,015$, un arc dont la longueur est la même que celle de l'arc précédent; en désignant cet angle par x, nous aurons

$$\frac{\pi r'' x}{180} = 0^m,006;$$

ces deux dernières équations donnent

$$\frac{\pi r'' x}{180} = \frac{2,5\pi r'}{180},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2,5\, r'}{r''} = \frac{2,5 \times 0,135}{0,015} = 2,5 \times 9;$$

ce qui fait voir que l'angle décrit par la touche n'est que la neuvième partie de celui qu'elle fait décrire au marteau.

Rien n'a été négligé par Séb. Érard dans les plus minutieux détails qui étaient nécessaires pour l'exécution de son mécanisme; à toutes les articulations et aux points où les pièces viennent se heurter, des garnitures en étoffes ou en peaux sont placées pour adoucir les mouvements et éviter le bruit qui nuirait à la pureté des sons.

Tous les mouvements s'exécutent sans gène et avec une précision dont on est étonné lorsqu'on les observe; c'est l'une des plus belles inventions dont le génie ait enrichi les arts.

La supériorité de ce mécanisme sur tous ceux que l'on a employés pour frapper les cordes du piano, consiste dans une force de percussion plus énergique, ce qui produit une plus grande intensité de son, et, par le moyen de l'échappement, le son peut être prolongé avec des nuances qui font presque disparaître un défaut que l'on ne croyait pas susceptible d'être corrigé. Sébastien Érard ne pensait pas que la difficulté fût insurmontable, il a employé bien des années à chercher le moyen d'y remédier; il faisait exécuter ses essais, pour en examiner les effets, par un ouvrier intelligent nommé Dubois, qui avait toute sa confiance et qui la méritait. Lorsqu'il eut trouvé son échappement il dit à Dubois : Maintenant nous pouvons faire des pianos!

Après tous les essais qui ont été faits par Sébastien Érard, la découverte du mécanisme auquel il s'est arrêté a dû lui procurer une grande satisfaction : ce mécanisme était complet, rien n'y a été ajouté ni retranché; mais les travaux que l'on a faits sous la direction de Jean-Baptiste Érard, pour la construction de ce nouveau piano, ont exigé des dépenses qui n'ont peut-être pas été couvertes par les bénéfices des quinze années de la durée du brevet.

Lorsque le nouveau piano d'Érard fut comparé à ceux que d'autres facteurs avaient mis à l'exposition de 1823, les Commissaires lui accordèrent la préférence qu'il méritait, pour la force du son et l'avantage de pouvoir facilement le répéter, en ne laissant parcourir au marteau qu'une partie de sa course; cependant il avait à vaincre, outre l'opposition d'une

active concurrence, la défaveur qu'éprouvent toutes les nouvelles inventions. En convenant des avantages qu'on ne pouvait pas contester, on élevait des doutes sur sa solidité et sa durée.

Sébastien Érard avait formé à Londres, il y a environ quarante ans, un établissement pour la construction des harpes, et depuis son retour en France son neveu, Pierre Érard en avait la direction; l'un des nouveaux pianos fut envoyé à cet établissement. Après avoir pris des patentes pour l'Angleterre, l'Ecosse et l'Irlande, Pierre Érard forma des ateliers pour construire ce piano; les dépenses de ce nouvel établissement se sont élevées à 10 ou 12 mille livres sterling, environ 300 000 francs.

Les dimensions de la caisse ont été agrandies, ce qui a augmenté le son produit par cet instrument; on en a fait venir plusieurs que l'on a d'abord imités; ceux que l'on fait maintenant dans la fabrique de Paris sont au moins aussi parfaits que ceux de la fabrique de Londres.

Quoique le succès de ce piano n'ait pas été douteux en Angleterre, il y a eu une concurrence qui en a ralenti la vente; à la fin de l'année 1835, la patente étant près d'échoir, Pierre Érard présenta une pétition pour demander qu'elle fût prolongée; une prolongation de sept ans lui fut accordée, après une enquête dont voici quelques passages.

Extrait des témoignages rendus sous le serment devant le Comité judiciaire du Conseil privé de Sa Majesté sur la pétition de Pierre Érard, le 15 *décembre* 1835.

M. Latour, *examiné par* M. *Peel.*

Vous êtes professeur de piano? — Oui.

Étiez-vous directeur des concerts philharmoniques en 1827 et 1828? — Oui.

Quelle est votre opinion sur le piano de M. Érard? — Qu'il est supérieur à tous sous le rapport du toucher et de l'élasticité, et sous celui de la force du son, ce qui le rend particulièrement propre à être entendu dans une grande salle.

De quels pianos s'est-on servi aux concerts philharmoniques? — Généralement des pianos de M. Érard.

M. Hertz s'en est-il servi? — Oui.

S'en est-on servi à cause de sa supériorité? — Oui.

La facilité de répétition du son est-elle plus grande sur ce piano? — Oui, on peut répéter le son autant de fois qu'on le veut.

Dans votre opinion, un perfectionnement de ce genre manquait-il beaucoup au piano? — C'était beaucoup à désirer.

Lord Lyndhurst. Depuis combien de temps avez-vous l'habitude de jouer sur cet instrument? — Depuis qu'il y en a en Angleterre.

Et cela depuis combien d'années? — Douze ans.

Le baron *Parke*. Pouvez-vous avoir une opinion sur sa durée? — Je conseillai à l'honorable Édouard Petre d'acheter un des pianos de M. Érard, l'instrument fut envoyé à Stapleton-Park il y a dix ans, et il a dernièrement été vendu 90 liv. sterl. (2250 fr.) aux enchères.

Lord Lyndhurst. Dans votre opinion, cette invention a-t-elle quelque influence sur la durée de l'instrument? — Pas la moindre: c'est si bien combiné que cela n'éprouve aucun dérangement dans toutes les épreuves que l'on peut faire subir au piano.

M. John Farey, *examiné par* M. *Creswell.*

Vous êtes, je crois, ingénieur? — Oui.

Avez-vous, depuis nombre d'années, fixé votre attention sur les objets d'art? — Mon attention, depuis bien des années, a été appliquée aux arts mécaniques; mes connaissances dans les objets qui concernent les beaux-arts se rapportent seulement aux relations qu'ils peuvent avoir avec les manufactures.

Avez-vous examiné les pianos des diverses constructions? — Très-fréquemment.

Connaissez-vous la construction du piano carré? — Oui, je crois bien connaître tous ceux qui ont été fabriqués.

Et le piano de M. Érard? — Oui, je le connais.

M. Farey donne ensuite des détails techniques sur le mécanisme dont on a vu précédemment le dessin et les explications.

Cette enquête contradictoire entre l'auteur d'une découverte et les dépositaires de l'autorité n'existe pas en France. Le Ministre du Commerce annonce qu'il a préparé, pour la session prochaine, un travail sur les brevets; il sera peut-être utile d'examiner si les enquêtes n'ajouteraient pas un perfectionnement qui pourrait être appliqué à des découvertes d'une grande importance.

FIN DU LIVRE DEUXIÈME,

ET DE LA MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES.

